Decomposição em Valores Singulares

[01] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real $n \times n$ simétrica. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os n autovalores de $\mathbf{A}$. Suponha que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Considere o problema de otimização

$$M = \max_{||\mathbf{x}||=1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||$$

Mostre que $M = |\lambda_1|$ e que o valor máximo ocorre quando $\mathbf{x}$ é um autovetor unitário correspondente ao autovalor λ_1. Aqui, $||\cdot||$ é a normal euclidiana usual.

[02] Suponha que uma matriz $\mathbf{A}$ possa ser escrita na forma $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{U}$ é uma matriz ortogonal $m \times m$, $\mathbf{V}$ é uma matriz ortogonal $n \times n$ e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r\times r} & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},$$

com $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos positivos. Mostre que os elementos da diagonal principal de $\boldsymbol{\Sigma}$ são os valores singulares da matriz $\mathbf{A}$.

[03] Se uma decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$ é $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, encontre uma SVD para $\mathbf{A}^T$. Como estão relacionados os valores singulares de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^T$?

[04] Mostre que se $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal $m \times m$, então $\mathbf{QA}$ tem os mesmos valores singulares que $\mathbf{A}$.

[05] Calcule uma decomposição SVD da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[06] Calcule uma decomposição SVD da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

[07] Suponha que uma matriz $\mathbf{A}$ inversível tenha uma decomposição SVD na forma $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$. Encontre uma decomposição SVD para $\mathbf{A}^{-1}$.

[08] Mostre que se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada, então o $|\det(\mathbf{A})|$ (o valor absoluto do determinante de $\mathbf{A}$) é igual ao produto dos valores singulares de $\mathbf{A}$.

[09] Mostre que se $\mathbf{A}$ é positiva definida e simétrica, então os valores singulares de $\mathbf{A}$ coincidem com os autovalores de $\mathbf{A}$.

[10] Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ cujos valores singulares não nulos são $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, os vetores singulares à esquerda são $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ e os vetores singulares à direita são $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Mostre que $\mathbf{A}$ pode ser escrita como soma de matrizes de posto 1:

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^T.$$

Respostas dos Exercícios

[03] Se $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é $m \times n$, então $\mathbf{A}^T = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^T\mathbf{U}^T$, com $\boldsymbol{\Sigma}^T$ uma matriz $n \times m$. Observe que se

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r\times r} & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},$$

então

$$\boldsymbol{\Sigma}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r\times r} & \mathbf{0}_{r\times(m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}.$$

Isto mostra que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^T$ possuem os mesmos valores singulares. Observação: se $\mathbf{A}$ é uma matriz $2\times n$, então $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ é apenas 2×2 e seus autovalores são mais fáceis de se calcular manualmente do que os autovalores de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 21/01/2009.