Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Aplicações de SVD

[01] O objetivo deste exercício é verificar o uso da decomposição em valores singulares em processamento de imagem. Para começar, acesse a página do curso e baixe o arquivo `dog.jpg`. Em seguida, no `MATLAB`, digite os seguintes comandos:

```
% Lê a imagem que é uma matriz de cinzas com valores entre 0 e 255 e a converte
% para uma matriz de doubles no intervalo [0, 1].

X = imread('dog.jpg');
A = double(X(:,:,1))/255.0;

% Desenha a imagem original
figure(2), subplot(2, 3, 1), image(A), colormap(gray(256)), axis image, axis off

% Calcula a decomposição SVD da matriz A
[U, S, V] = svd(A);

% Calcula e desenha uma aproximação de posto 1 da imagem A
r = 1; M = U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
figure(2), subplot(2, 3, 2), image(M), colormap(gray(256)), axis image, axis off

% Calcula e desenha uma aproximação de posto 4 da imagem A
r = 4; M = U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
figure(2), subplot(2, 3, 3), image(M), colormap(gray(256)), axis image, axis off

% Calcula e desenha uma aproximação de posto 16 da imagem A
r = 16; M = U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
figure(2), subplot(2, 3, 4), image(M), colormap(gray(256)), axis image, axis off

% Calcula e desenha uma aproximação de posto 32 da imagem A
r = 32; M = U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
figure(2), subplot(2, 3, 5), image(M), colormap(gray(256)), axis image, axis off

% Calcula e desenha uma aproximação de posto 64 da imagem A
r = 64; M = U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
figure(2), subplot(2, 3, 6), image(M), colormap(gray(256)), axis image, axis off
```

Você deve entregar uma cópia impressa do gráfico com as seis imagens. Quais são os tamanhos da matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{V}$?

[02] Calcule a pseudo-inversa $\mathbf{A}^+$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Use $\mathbf{A}^+$ para obter a solução por quadrados mínimos de menor norma do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

[03] Mostre que se $\mathbf{A}$ tem colunas linearmente independentes, então $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$.

[04] Vale sempre que $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+$? Justifique a sua resposta!

[05] Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada inversível, quem é sua a pseudo-inversa $\mathbf{A}^+$?

[06] Se $\mathbf{Q}$ é uma matriz $m \times n$ com colunas ortonormais, quem é a sua pseudo-inversa $\mathbf{Q}^+$?

Respostas dos Exercícios

[02] $\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

[03] Seja $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ a SVD de $\mathbf{A}$. Então:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T &= (\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{V}^T)^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T = (\mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{V}^T)^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{V}(\mathbf{D}^2)^+\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T = \mathbf{A}^+.\end{aligned}$$

[04] Nem sempre $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+$. Considere, por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\mathbf{AB})^+ = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Mas

$$\mathbf{B}^+\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1/4 \end{bmatrix}.$$

[05] $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

[06] $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}^T$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 24/01/2010.