Pré-Cálculo

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Aula 16

23 de junho de 2011

Função polinomial

Função polinomial

Definição

Diz-se que $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial se existe inteiro $n \geq 0$ e existem números reais a_0, a_1, $\ldots$, a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Uma função polinomial chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (não se define grau para uma função polinomial identicamente nula).

Dizemos que α é uma raiz de p se $p(\alpha) = 0$ (note que todo número real é raiz de uma função polinomial identicamente nula).

Função polinomial

Definição

Diz-se que $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial se existe inteiro $n \geq 0$ e existem números reais a_0, a_1, $\ldots$, a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Uma função polinomial chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (não se define grau para uma função polinomial identicamente nula).

Dizemos que α é uma raiz de p se $p(\alpha) = 0$ (note que todo número real é raiz de uma função polinomial identicamente nula).

Função polinomial

Definição

Diz-se que $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial se existe inteiro $n \geq 0$ e existem números reais a_0, a_1, $\ldots$, a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Uma função polinomial chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (não se define grau para uma função polinomial identicamente nula).

Dizemos que α é uma raiz de p se $p(\alpha) = 0$ (note que todo número real é raiz de uma função polinomial identicamente nula).

Função polinomial

Definição

Diz-se que $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial se existe inteiro $n \geq 0$ e existem números reais a_0, a_1, ..., a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Uma função polinomial chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (não se define grau para uma função polinomial identicamente nula).

Dizemos que α é uma raiz de p se $p(\alpha) = 0$ (note que todo número real é raiz de uma função polinomial identicamente nula).

Definição

Diz-se que $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial se existe inteiro $n \geq 0$ e existem números reais a_0, a_1, ..., a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Uma função polinomial chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (não se define grau para uma função polinomial identicamente nula).

Dizemos que α é uma raiz de p se $p(\alpha) = 0$ (note que todo número real é raiz de uma função polinomial identicamente nula).

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial: exemplos

São exemplos de funções polinomiais:

$$p(x) = x^3 - 2\,x + 1 \text{ (de grau 3)}, \quad p(x) = x^7 - \sqrt{2}\,x - 9 \text{ (de grau 7)},$$

as funções afins e quadráticas,

$$p(x) = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1, \quad p(x) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = x^2 + 1.$$

Não são funções polinomiais:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f(x) = 2^x.$$

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, $\ldots$, a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, $\ldots$, a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

Função polinomial versus polinômio

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são números (os coeficientes do polinômio) e X é um símbolo (chamado indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot \cdots \cdot X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:

$$p(X) = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Se os coeficientes são números reais, então cada polinômio determina uma função polinomial e vice-versa. Por esse motivo, para o caso dos números reais, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais. Existem certos conjuntos numéricos, contudo, onde a diferença existe.

O algoritmo da divisão de Euclides

O algoritmo da divisão de Euclides

Dadas duas funções polinomiais p e d (com d não identicamente nula), existem únicas funções polinomiais q e r tais que

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

onde r é identicamente nula ou o grau de r é menor do que o grau de d. Neste caso, p é chamado de dividendo, d de divisor, q de quociente e r de resto da divisão de p por d. Quando o resto r é uma função identicamente nula, dizemos que p é divisível por d.

É possível demonstrar este teorema formalizando o processo que descreveremos a seguir.

O algoritmo da divisão de Euclides

O algoritmo da divisão de Euclides

Dadas duas funções polinomiais p e d (com d não identicamente nula), existem únicas funções polinomiais q e r tais que

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

onde r é identicamente nula ou o grau de r é menor do que o grau de d. Neste caso, p é chamado de dividendo, d de divisor, q de quociente e r de resto da divisão de p por d. Quando o resto r é uma função identicamente nula, dizemos que p é divisível por d.

É possível demonstrar este teorema formalizando o processo que descreveremos a seguir.

O algoritmo da divisão de Euclides

Dadas duas funções polinomiais p e d (com d não identicamente nula), existem únicas funções polinomiais q e r tais que

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

onde r é identicamente nula ou o grau de r é menor do que o grau de d. Neste caso, p é chamado de dividendo, d de divisor, q de quociente e r de resto da divisão de p por d. Quando o resto r é uma função identicamente nula, dizemos que p é divisível por d.

É possível demonstrar este teorema formalizando o processo que descreveremos a seguir.

O algoritmo da divisão de Euclides

Dadas duas funções polinomiais p e d (com d não identicamente nula), existem únicas funções polinomiais q e r tais que

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

onde r é identicamente nula ou o grau de r é menor do que o grau de d. Neste caso, p é chamado de dividendo, d de divisor, q de quociente e r de resto da divisão de p por d. Quando o resto r é uma função identicamente nula, dizemos que p é divisível por d.

É possível demonstrar este teorema formalizando o processo que descreveremos a seguir.

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$\begin{array}{l|l} x^4 \qquad\quad - 3x^2 + x - 1 & x^2 - x + 1 \\ \hline \end{array}$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$\begin{array}{l|l} x^4 \qquad - 3x^2 + x - 1 & x^2 - x + 1 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-x^4 & & & & x^2
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -\,3x^2 & +\,x & -\,1 & \;x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & +\,x^3 & & & & \;x^2
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -\,3x^2 & +\,x & -\,1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & +\,x^3 & -\,x^2 & & & x^2
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & \;x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \;x^2 \\ \cline{1-3}
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -\,3x^2 & +\,x & -\,1 & \;x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & +\,x^3 & -\,x^2 & & & \;x^2 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -\,4x^2 & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad + x \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad + x \\
\cline{1-3}
& x^3 & -4x^2 & +x & & \\
& -x^3 & & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & & x^2 - x + 1 \\ \cline{7-7}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & & x^2 \quad + x \\ \cline{1-3}
& x^3 & -4x^2 & +x & & & \\
& -x^3 & +x^2 & & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & \;x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \;x^2 \quad + x \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad +x \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{7-7}
- & x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad + x \\ \cline{1-4}
 & & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & & -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x^2 & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2-x+1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2+x \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & & -3x^2 & & -1 &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -\,3x^2 & +\,x & -\,1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-\,x^4 & +\,x^3 & -\,x^2 & & & x^2 \quad + x - 3 \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -\,4x^2 & +\,x & & \\
 & -\,x^3 & +\,x^2 & -\,x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\,3x^2 & & -\,1 &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 + x - 3 \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & & -3x^2 & & -1 & \\
 & & 3x^2 & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 + x - 3 \\ \cline{1-3}
& x^3 & -4x^2 & +x & & \\
& -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
& & -3x^2 & & -1 & \\
& & 3x^2 & -3x & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 + x - 3 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & & -1 & \\
 & & 3x^2 & -3x & +3 &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad + x - 3 \\
\cline{1-3}
& x^3 & -4x^2 & +x & & \\
& -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
& & -3x^2 & & -1 & \\
& & 3x^2 & -3x & +3 & \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & & x^2 - x + 1 \\
\cline{7-7}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & & x^2 \;\; + x - 3 \\
\cline{1-3}
& x^3 & -4x^2 & +x & & & \\
& -x^3 & +x^2 & -x & & & \\
\cline{2-4}
& & -3x^2 & & -1 & & \\
& & 3x^2 & -3x & +3 & & \\
\cline{3-5}
& & & -3x & +2 & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad + x - 3 \\
\cline{1-3}
& x^3 & -4x^2 & +x & & \\
& -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
& & -3x^2 & & -1 & \\
& & 3x^2 & -3x & +3 & \\
\cline{3-5}
& & & -3x & +2 &
\end{array}
$$

$$x^4 - 3x^3 + x - 1 = (x^2 + x - 3)\,(x^2 - x + 1) + (-3x + 2)$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 + x - 3 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & & -1 & \\
 & & 3x^2 & -3x & +3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x & +2 &
\end{array}
$$

$$
\underbrace{x^4 - 3x^3 + x - 1}_{p(x)} = \underbrace{(x^2 + x - 3)}_{q(x)}\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{d(x)} + \underbrace{(-3x + 2)}_{r(x)}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad - 2 \;\; \underline{|\, x + 1 \qquad\qquad\qquad}$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\quad - 2 & x + 1 \\
\cline{2-2}
 & x^3
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad - 2 & x + 1 \\ \cline{3-3}
- & x^4 & x^3
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -2 & x+1 \\
\cline{6-6}
- & x^4 & -x^3 & & & x^3
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -x^3 & & & & x^3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad - 2 & x+1 \\
\cline{2-2}
-x^4 \quad - x^3 \qquad\qquad\quad & x^3 \\
\cline{1-1}
-4x^3 \qquad\qquad\quad &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\,2 & x+1 \\ \cline{5-5}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & x^3 \\ \cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\,2 & x+1 \\ \cline{5-5}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & x^3 - 4x^2 \\ \cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -2 & x+1 \\
\cline{5-5}
-x^4 & -x^3 & & & x^3-4x^2 \\
\cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & \\
 & 4x^3 & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrl|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & & -\,2 & x+1 \\
\cline{6-6}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & & x^3 - 4x^2 \\
\cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & & & \\
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -2 & \lfloor\, x+1 \\
-x^4 & -x^3 & & & x^3 - 4x^2 \\
\hline
 & -4x^3 & +2x^2 & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -2 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^4 & -x^3 & & & x^3-4x^2 \\ \cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrl|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x \\ \cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\,2 & \underline{|\,x+1} \\
-\,x^4 & -\,x^3 & & & x^3 - 4x^2 + 6x \\
\hline
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & & \\
\hline
 & & 6x^2 & & \\
 & & -\,6x^2 & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3 - 4x^2 + 6x \\
\cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -6x^2 & -6x & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & & -\,2 & \;x+1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & & \;x^3 - 4x^2 + 6x \\ \cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -\,6x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & & -\,2 & x+1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & & x^3 - 4x^2 + 6x \\ \cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -\,6x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,6x & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & & -\,2 & \,x+1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & & x^3-4x^2+6x \\ \cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -\,6x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,6x & -\,2 &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\ \cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -6x^2 & -6x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x & -2 &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\
\cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -6x^2 & -6x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -6x & -2 & \\
 & & & 6x & &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\
\cline{1-2}
& -4x^3 & +2x^2 & & & \\
& 4x^3 & +4x^2 & & & \\
\cline{2-3}
& & 6x^2 & & & \\
& & -6x^2 & -6x & & \\
\cline{3-4}
& & & -6x & -2 & \\
& & & 6x & +6 & \\
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & & -\,2 & x+1 \\
\cline{6-6}
-\,x^4 & -\,x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\
\cline{1-2}
 & -\,4x^3 & +\,2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -\,6x^2 & -\,6x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -\,6x & -\,2 & \\
 & & & 6x & +\,6 & \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\ \cline{1-2}
 & -4x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & & & \\
 & & -6x^2 & -6x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x & -2 & \\
 & & & 6x & +6 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4 &
\end{array}
$$

O algoritmo da divisão de Euclides: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\ \cline{1-2}
& -4x^3 & +2x^2 & & & \\
& 4x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
& & 6x^2 & & & \\
& & -6x^2 & -6x & & \\ \cline{3-4}
& & & -6x & -2 & \\
& & & 6x & +6 & \\ \cline{4-5}
& & & & 4 &
\end{array}
$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2 = (x^3 - 4x^2 + 6x - 6)\,(x + 1) + \quad 4$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2+6x-6 \\ \cline{1-2}
& -4x^3 & +2x^2 & & & \\
& 4x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
& & 6x^2 & & & \\
& & -6x^2 & -6x & & \\ \cline{3-4}
& & & -6x & -2 & \\
& & & 6x & +6 & \\ \cline{4-5}
& & & & 4 &
\end{array}
$$

$$
\underbrace{x^4-3x^3+2x^2-2}_{p(x)} = \underbrace{(x^3-4x^2+6x-6)}_{q(x)}\underbrace{(x+1)}_{d(x)} + \underbrace{4}_{r(x)}
$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini) é uma maneira rápida de efetuarmos a divisão de uma função polinomial p por uma função polinomial de grau 1 da forma $d(x) = x - \alpha$.

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & & & & & \\ \hline & & & & & \boxed{} \end{array}$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & \boxed{}
\end{array}$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & & -1 & & & \\ \hline & 1 & & & & \boxed{} \end{array}$$

$\cdot(-1)$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & -4 & & & \boxed{}
\end{array}$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & -1 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & \cdot(-1) & & \boxed{}
\end{array}$$

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & & -1 & 4 & & \\ \hline & 1 & -4 & 6 & & \boxed{} \end{array}$$

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & -1 & 4 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & & \boxed{}
\end{array}$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & -1 & 4 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & -6 & \boxed{}
\end{array}$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & -1 & 4 & -6 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & -6 & \boxed{}
\end{array}$$

$\cdot(-1)$

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & & -1 & 4 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & -6 & \boxed{4} \end{array}$$

O dispositivo de Horner (dispositivo de Briot-Ruffini)

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 2, \quad d(x) = x + 1 = x - (-1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & & -1 & 4 & -6 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & -6 & \boxed{4}
\end{array}$$

Teorema (de D’Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

■

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

∎

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

∎

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

$\blacksquare$

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

$\blacksquare$

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

$\blacksquare$

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

$\blacksquare$

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

∎

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

■

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

■

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p

Teorema de D'Lambert

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

■

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p, isto é, se, e somente se,

$$p(x) = q(x)(x - \alpha),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - 1$ se p tem grau n.

Teorema (de D'Lambert). Se p é uma uma função polinomial e $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então o resto da divisão de p por d é $p(\alpha)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$, onde r é uma função polinomial identicamente nula ou de grau zero (isto é, r é uma função constante: $r(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Logo,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + c \quad \Rightarrow \quad p(\alpha) = c. \quad \Rightarrow \quad r(x) = c = p(\alpha).$$

■

No exemplo anterior, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$, $d(x) = x + 1$ e $r(x) = 4 = p(-1)$.

Corolário. Uma função polinomial p é divisível por $d(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, se, e somente se, α é uma raiz de p, isto é, se, e somente se,

$$p(x) = q(x)(x - \alpha),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - 1$ se p tem grau n.

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. $\blacksquare$

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ∎

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ■

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x-\alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ■

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x-\alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ∎

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ∎

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n-k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x-\alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n-2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n-2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. $\blacksquare$

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ∎

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n-k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x-\alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n-2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n-2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ■

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ■

Teorema de D'Lambert

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$.

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x - \alpha_2)(x - \alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n - 2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. $\square$

Corolário. Mais geralmente, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p se, e somente se,

$$p(x) = q(x)\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k), \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é uma função polinomial de grau $n-k$ se p tem grau n.

Demonstração. Se α_1 é uma raiz de p, então pelo corolário anterior, podemos escrever que $p(x) = q_1(x)(x-\alpha_1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_1 é igual a $n-1$. Substituindo $x = \alpha_2$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_2) = q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, concluímos que $q_1(\alpha_2) = 0$, isto é, α_2 é uma raiz de q_1. Usando agora o corolário anterior para q_1, concluímos que $q_1(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n-2$. Logo,

$$p(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o grau de q_2 é igual a $n-2$. Substituindo $x = \alpha_3$ nesta igualdade, obtemos que $0 = p(\alpha_3) = q_2(\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_3$ e $\alpha_2 \neq \alpha_3$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$. Prosseguindo recursivamente com este argumento, obtemos que a função polinomial p pode ser escrita na forma $(*)$. ∎

Teorema de D'Lambert

Corolário. Uma função polinomial de grau n não pode ter mais do que n raízes reais distintas.

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2+1)(x-2)(x-1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

	1	-3	3	-3	2
1		1	-2	1	-2
	1	-2	1	-2	$\boxed{0}$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	$\boxed{0}$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

	1	-3	3	-3	2
1		1	-2	1	-2
	1	-2	1	-2	$\boxed{0}$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	$\boxed{0}$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2+1)(x-2)(x-1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

	1	-3	3	-3	2
1		1	-2	1	-2
	1	-2	1	-2	$\boxed{0}$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	$\boxed{0}$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

	1	−3	3	−3	2
1		1	−2	1	−2
	1	−2	1	−2	$\boxed{0}$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

	1	−2	1	−2
2		2	0	2
	1	0	1	$\boxed{0}$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2+1)(x-2)(x-1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2+1)(x-2)(x-1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x-2)(x-1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2+1)(x-2)(x-1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x - 1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x - 2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 1).$$

Exemplo

Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$. Como $p(1) = 0$, segue-se que $\alpha_1 = 1$ é raiz de p. Logo p é divisível por $x - 1$. Usando o dispositivo de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = q_1(x)(x-1)$, onde $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 + x - 2$. Como $q_1(2) = 0$, segue-se que $\alpha_2 = 2$ é raiz de q_1. Logo q_1 é divisível por $x - 2$. Usando o dispositivo de Horner mais uma vez:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
2 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

concluímos então que $q_1(x) = q_2(x)(x-2)$, onde $q_2(x) = x^2 + 1$. Portanto,

$$p(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 = (x^2+1)(x-2)(x-1).$$

O teorema fundamental da álgebra

Teorema. Toda função polinomial de grau ≥ 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração deste teorema requer recursos de análise. Ela será feita posteriormente no curso de variáveis complexas.

Definição. Dizemos que uma raiz α de uma função polinomial p tem multiplicidade m ($m \geq 1$) se p for divisível por $(x - \alpha)^m$ e não for divisível por $(x - \alpha)^{m+1}$. Observe que uma raiz α tem multiplicidade m se, e só se,

$$p(x) = q(x)(x - \alpha)^m,$$

onde $q(\alpha) \neq 0$.

Corolário. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial com raízes distintas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$, respectivamente, então

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k},$$

com $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

O teorema fundamental da álgebra

Teorema. Toda função polinomial de grau ≥ 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração deste teorema requer recursos de análise. Ela será feita posteriormente no curso de variáveis complexas.

Definição. Dizemos que uma raiz α de uma função polinomial p tem multiplicidade m ($m \geq 1$) se p for divisível por $(x - \alpha)^m$ e não for divisível por $(x - \alpha)^{m+1}$. Observe que uma raiz α tem multiplicidade m se, e só se,

$$p(x) = q(x)(x - \alpha)^m,$$

onde $q(\alpha) \neq 0$.

Corolário. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial com raízes distintas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$, respectivamente, então

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k},$$

com $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

O teorema fundamental da álgebra

Teorema. Toda função polinomial de grau ≥ 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração deste teorema requer recursos de análise. Ela será feita posteriormente no curso de variáveis complexas.

Definição. Dizemos que uma raiz α de uma função polinomial p tem multiplicidade m ($m \geq 1$) se p for divisível por $(x-\alpha)^m$ e não for divisível por $(x-\alpha)^{m+1}$. Observe que uma raiz α tem multiplicidade m se, e só se,

$$p(x) = q(x)(x-\alpha)^m,$$

onde $q(\alpha) \neq 0$.

Corolário. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial com raízes distintas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$, respectivamente, então

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k},$$

com $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

O teorema fundamental da álgebra

Teorema. Toda função polinomial de grau ≥ 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração deste teorema requer recursos de análise. Ela será feita posteriormente no curso de variáveis complexas.

Definição. Dizemos que uma raiz α de uma função polinomial p tem multiplicidade m ($m \geq 1$) se p for divisível por $(x - \alpha)^m$ e não for divisível por $(x - \alpha)^{m+1}$. Observe que uma raiz α tem multiplicidade m se, e só se,

$$p(x) = q(x)(x - \alpha)^m,$$

onde $q(\alpha) \neq 0$.

Corolário. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial com raízes distintas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$, respectivamente, então

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k},$$

com $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

O teorema fundamental da álgebra

Teorema. Toda função polinomial de grau ≥ 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração deste teorema requer recursos de análise. Ela será feita posteriormente no curso de variáveis complexas.

Definição. Dizemos que uma raiz α de uma função polinomial p tem multiplicidade m ($m \geq 1$) se p for divisível por $(x-\alpha)^m$ e não for divisível por $(x-\alpha)^{m+1}$. Observe que uma raiz α tem multiplicidade m se, e só se,

$$p(x) = q(x)(x-\alpha)^m,$$

onde $q(\alpha) \neq 0$.

Corolário. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial com raízes distintas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de multiplicidades m_1, m_2, ..., m_k, respectivamente, então

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k},$$

com $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0} = \overline{0} \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad a_n\, \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n\,\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\,\overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0} = \overline{0} \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad a_n\, \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

∎

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n\, \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n\, \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n\,\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\,\overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0} = \overline{0} \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad a_n\,\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\,\overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0} = \overline{0} \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad a_n\, \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\, \overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

O teorema da decomposição em fatores irredutíveis

Lema. Seja $p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ uma função polinomial cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então o seu complexo conjugado $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de p.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0} = \overline{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n\,\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\,\overline{\alpha} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = 0.
\end{aligned}
$$

■

Teorema (da decomposição em fatores irredutíveis). Se p é uma função polinomial cujos coeficientes são números reais, então p pode ser decomposta como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (do tipo $(ax + b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, associados às pares de raízes conjugadas).

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.

- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".

- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.

- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.

- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802–1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.
- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Bhaskara”.
- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Tartaglia/Cardano” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a “fórmula de Ferrari” (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.
- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Como calcular as raízes de uma função polinomial?

- Se a função polinomial é de grau 1, existe uma fórmula para calcular sua raiz.

- Se a função polinomial é de grau 2, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Bhaskara".

- Se a função polinomial é de grau 3, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Tartaglia/Cardano" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.

- Se a função polinomial é de grau 4, existe uma fórmula (com radicais) para calcular sua raiz: a "fórmula de Ferrari" (ver a fórmula no Maxima). A fórmula, contudo, não é prática.

- Se a função polinomial é de grau 5, Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que não existe uma fórmula (com radicais).

  Remédios: casos particulares (raízes inteiras, raízes racionais) e métodos numéricos.

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 \quad & \Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\ & \Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\ & \Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. $\blacksquare$

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\
&\Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. $\blacksquare$

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ■

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
& \Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\
& \Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ∎

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
& \Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\
& \Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ■

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\
&\Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ■

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$
\begin{aligned}
p(\alpha) = 0 \quad & \Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\
& \Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\
& \Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ∎

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ∎

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0.

Pesquisa de raízes inteiras

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ for raiz de p, α é divisor de a_0.

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é uma raiz de p, então

$$\begin{aligned} p(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_0 = -a_n\,\alpha^n - a_{n-1}\,\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\,\alpha \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_0}{\alpha} = -a_n\,\alpha^{n-1} - a_{n-1}\,\alpha^{n-2} - \cdots - a_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, se $a_0/\alpha \in \mathbb{Z}$, então α é um divisor de a_0. ■

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156, \ p(-2) = 0, \ p(-1) = 12, \ p(+1) = -6, \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x - 1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ p(-2) = 0,\ p(-1) = 12,\ p(+1) = -6,\ p(+2) = 0 \text{ e } p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156, \; p(-2) = 0, \; p(-1) = 12, \; p(+1) = -6, \; p(+2) = 0 \; \text{ e } \; p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x - 1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0\ \ \text{e}\ \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ p(-2) = 0,\ p(-1) = 12,\ p(+1) = -6,\ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ p(-2) = 0,\ p(-1) = 12,\ p(+1) = -6,\ p(+2) = 0 \text{ e } p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x - 1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156,\ \ p(-2) = 0,\ \ p(-1) = 12,\ \ p(+1) = -6,\ \ p(+2) = 0 \ \text{ e } \ p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x - 2)(x + 2)(3\,x - 1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156, \;\; p(-2) = 0, \;\; p(-1) = 12, \;\; p(+1) = -6, \;\; p(+2) = 0 \;\; \text{e} \;\; p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x-2)(x+2)(3\,x-1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes inteiras

Exemplo. Fatore $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

Solução. Os candidatos a raiz inteira de p são os divisores inteiros de 4:

$$\{-4, -2, -1, +1, +2, +4\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 4 \neq 0$). Como

$$p(-4) = -156, \;\; p(-2) = 0, \;\; p(-1) = 12, \;\; p(+1) = -6, \;\; p(+2) = 0 \;\; \text{e} \;\; p(+4) = 132,$$

concluímos que as únicas raízes inteiras de p são -4 e $+4$. Logo p é divisível por $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que

$$p(x) = (x - 2)(x + 2)(3\,x - 1).$$

Para resolver a inequação $p(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4 \geq 0$ basta fazer o estudo de sinal de p em sua forma fatorada: $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

Pesquisa de raízes racionais

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha = m/k \in \mathbb{Q} - \{0\}$ for raiz de p, com m/k fração irredutível, então m é divisor de a_0 e k é divisor de a_n.

Demonstração. Exercício! $\blacksquare$

Pesquisa de raízes racionais

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha = m/k \in \mathbb{Q} - \{0\}$ for raiz de p, com m/k fração irredutível, então m é divisor de a_0 e k é divisor de a_n.

Demonstração. Exercício!

Pesquisa de raízes racionais

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha = m/k \in \mathbb{Q} - \{0\}$ for raiz de p, com m/k fração irredutível, então m é divisor de a_0 e k é divisor de a_n.

Demonstração. Exercício! $\square$

Pesquisa de raízes racionais

Teorema. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros, isto é, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha = m/k \in \mathbb{Q} - \{0\}$ for raiz de p, com m/k fração irredutível, então m é divisor de a_0 e k é divisor de a_n.

Demonstração. Exercício! ■

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2 + 2x - 2)(x - 3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2 + 2x - 2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p\,(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p\,(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$p\,(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p\,(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a “fórmula de Bhaskara” para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p\,(-3) = -45,\; p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\; p\,(-1) = 5,\; p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\; p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$p\,(+1) = -1,\; p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \;\text{ e }\; p\,(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2 + 2x - 2)(x - 3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2 + 2x - 2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\; p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\; p(-1) = 5,\; p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\; p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\; p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \;\text{ e }\; p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p\,(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p\,(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p\,(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } p\,(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p\,(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p\,(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p\,(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } \ p\,(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2 + 2x - 2)(x - 3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2 + 2x - 2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \ \text{e}\ p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2 + 2x - 2)(x - 3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2 + 2x - 2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Pesquisa de raízes racionais

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } p(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a “fórmula de Bhaskara” para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1-\sqrt{5})/2)(x + (1+\sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$

Exemplo. Determine as raízes racionais de $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$.

Solução. Os divisores de $a_0 = 3$ são $\{-3, -1, +1, +3\}$ e os divisores de $a_3 = 2$ são $\{-2, -1, +1, +2\}$. Assim, os candidatos a raiz racional de p são

$$\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{3}{2}, +3\right\}$$

(note que 0 não é raiz de p, pois $p(0) = 3 \neq 0$). Como

$$p\,(-3) = -45,\ p\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ p\,(-1) = 5,\ p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5,\ p\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$p\,(+1) = -1,\ p\left(+\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } p\,(+3) = 33,$$

concluímos que a única raiz racional de p é $+3/2$. Logo p é divisível por $x - 3/2$. Usando o dispositivo de Horner (ou o algoritmo da divisão de Euclides), concluímos que $p(x) = (2x^2+2x-2)(x-3/2)$. Usando a "fórmula de Bhaskara" para $q(x) = 2x^2+2x-2$, obtemos que

$$p(x) = 2\,(x + (1 - \sqrt{5})/2)(x + (1 + \sqrt{5})/2)(x - 3/2).$$