Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 1

Versão 0.9

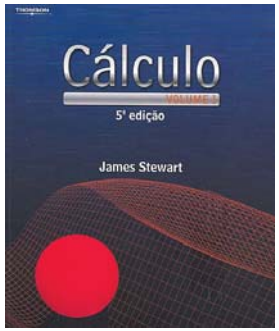
Apresentação do curso

Conteúdo do curso

- Funções reais de uma variável real.
- Limites.
- Continuidade.
- Derivadas.
- Estudo da variação de funções.
- Integração.

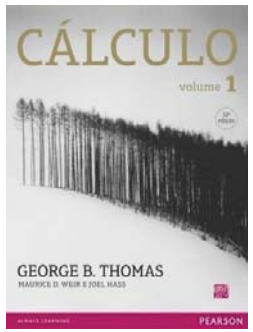
Bibliografia

James Stewart. Cálculo, volume 1, Quinta edição, Editora Thomson Pioneira, 2006.



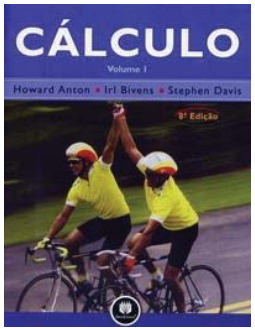
Bibliografia

George B. Thomas. Cálculo, volume 1, Décima segunda edição, Editora Addison-Wesley, 2012.



Bibliografia

Howard Anton. Cálculo – Um Novo Horizonte, volume 1, Oitava edição, Editora Bookman, 2006.



Outras informações

- Página WEB do curso: http://www.professores.uff.br/hjbortol/.
  Clique no link DISCIPLINAS no menu à esquerda.

  Conteúdo: cronograma dia a dia, lista de execícios, material extra, notas das provas.

- Não deixe de consultar os horários de monitoria no GMA.

- Vamos definir agora um horário de atendimento para esta turma.

Revisão: funções reais

O que é uma função?

Definição

Uma função real f é uma lei a qual, para cada elemento x em um subconjunto D de $\mathbb{R}$, faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um subconjunto C de $\mathbb{R}$.

D é denominado de domínio e C de contradomínio da função f.

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

Exemplo

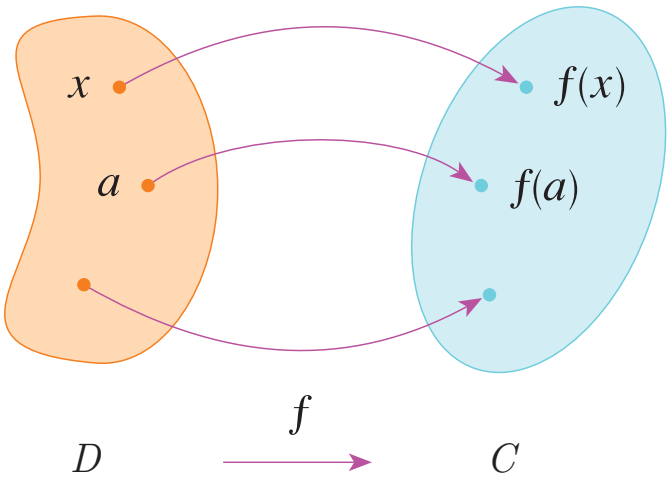
Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

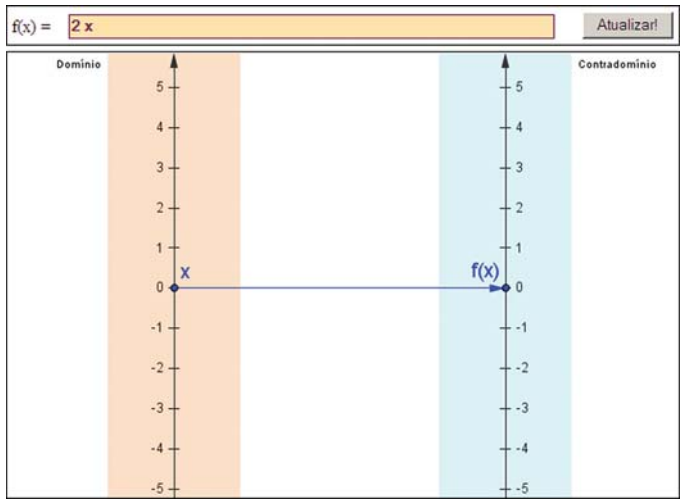
$$f(0) = 0, \qquad f(2) = 4, \qquad f(a+b) = 2\,(a+b), \qquad f(\square) = 2\,\square.$$

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \frac{2\,(p+h) - 2\,p}{h} = \frac{2\,p + 2\,h - 2\,p}{h} = 2.$$

Lembram-se dos diagramas de Venn?

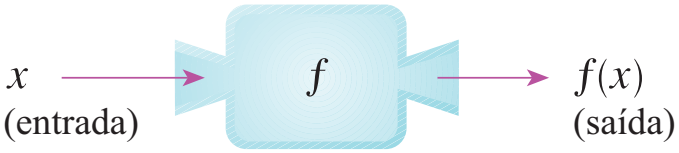


Lembram-se dos diagramas de Venn?



(Ir para o GeoGebra)

Uma outra representação para funções



Cuidado!

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D & \to & C \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

- Aqui x é um número real no domínio D!
- Aqui $f(x)$ é um número real no contradomínio C! $f(x) \in C$ chama-se o valor assumido pela função f no ponto $x \in D$.
- Aqui f é uma função real que a cada número real x no domínio D associa um único número real $f(x)$ no contradomínio C!
- O correto é dizer "a função f" e não "a função $f(x)$" (ou "a função $y = f(x)$"). Contudo, por simplicidade, livros e pessoas costumam usar as formas incorretas. Exemplo: dizer "a função $y = 2x$" ao invés de "a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = 2x$".

Revisão: imagem de uma função real

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array}$$

1 pertence a imagem de f? Sim, pois $f(1/2) = 1$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array}$$

2 pertence a imagem de f? Sim, pois $f(1) = 2$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$\sqrt{3}$ pertence a imagem de f? Sim, pois $f(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

$b \in \mathbb{R}$ pertence a imagem de f? Sim, pois $f(b/2) = b$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x \end{array}$$

Moral: Imagem de $f = \mathbb{R}$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

2 pertence a imagem de f? Sim, pois $f(\sqrt{2}) = 2$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Temos que $f(\sqrt{2}) = 2$. Note, também, que $f(-\sqrt{2}) = 2$.

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Para que $y \in$ Imagem de f basta um $x \in D$ tal que $f(x) = y$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

0 pertence a imagem de f? Sim, pois $f(0) = 0$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

-1 pertence a imagem de f? Não, pois $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \geq 0$ e $-1 < 0$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$b \geq 0$ pertence a imagem de f? Sim, pois $f(\sqrt{b}) = b$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$b < 0$ pertence a imagem de f? Não

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$b < 0$ pertence a imagem de f? Não, pois $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \geq 0$ e $b < 0$!

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \in C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

$$\text{Imagem de } f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \text{ com } f(x) = y\}.$$

Exemplo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Moral: Imagem de $f = [0, +\infty)$!

Determinar a imagem de uma função pode ser difícil!

Qual é a imagem da função f abaixo?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Imagem de } f &= \left[\frac{1695 + (-135 + 20\sqrt{6})\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}} + (-49 + 24\sqrt{6})\sqrt[3]{(135 + 60\sqrt{6})^2}}{2304}, +\infty\right) \\ &= [0.6735532234764100089\ldots, +\infty). \end{aligned}$$

Veremos mais adiante no curso como as ferramentas de Cálculo podem ajudar a resolver questões deste tipo!

Revisão: gráfico de uma função real

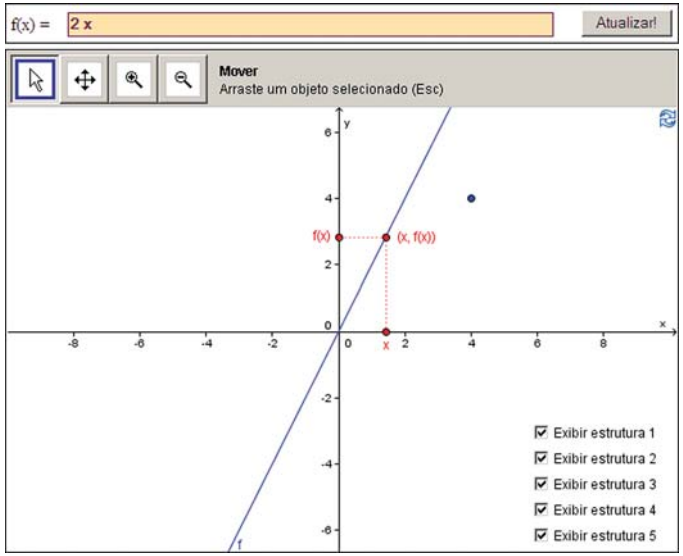
O que é o gráfico de uma função real?

Definição

O gráfico de uma função real $f\colon D \to C$ é o subconjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \in D$ e $y = f(x)$:

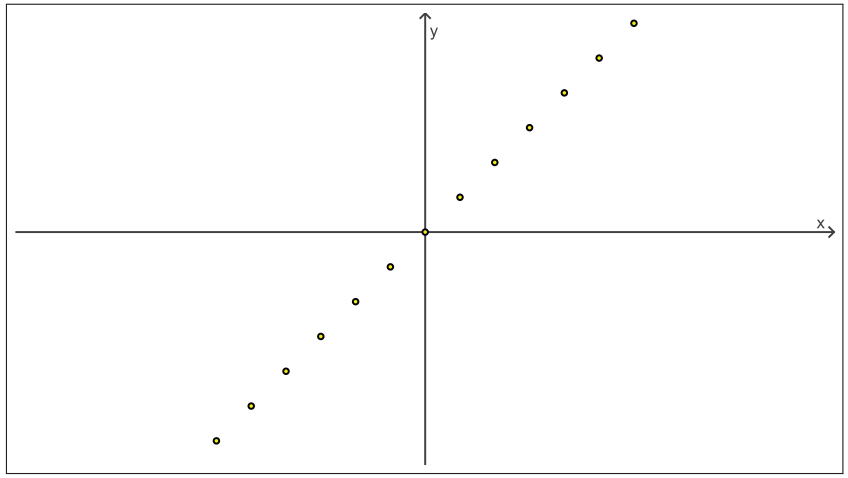
$$\text{Gráfico de } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

O que é o gráfico de uma função real?

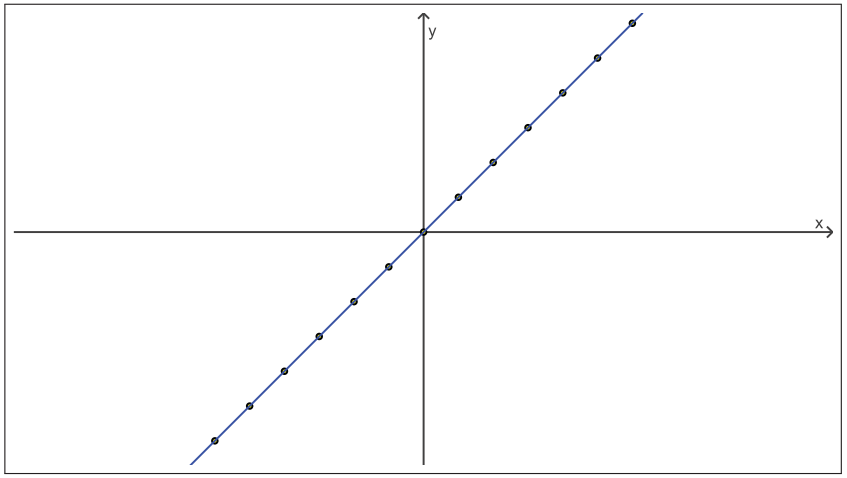


(Ir para o GeoGebra)

Como construir o gráfico de uma função real?

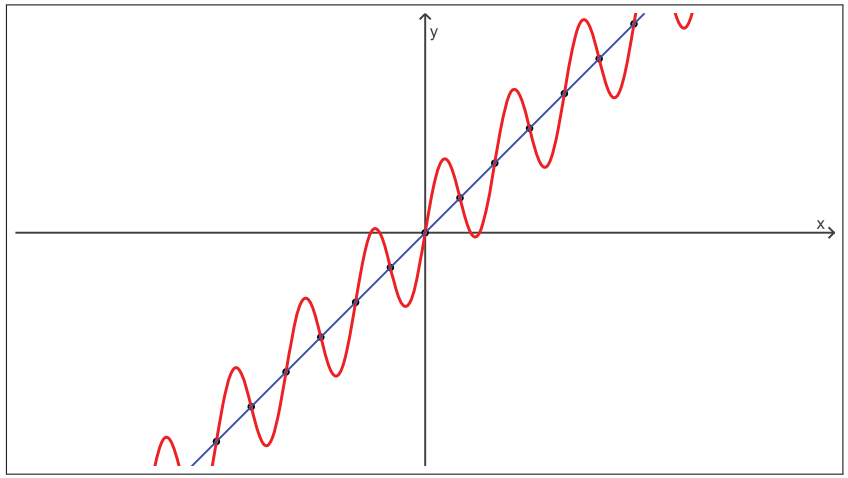


Como construir o gráfico de uma função real?



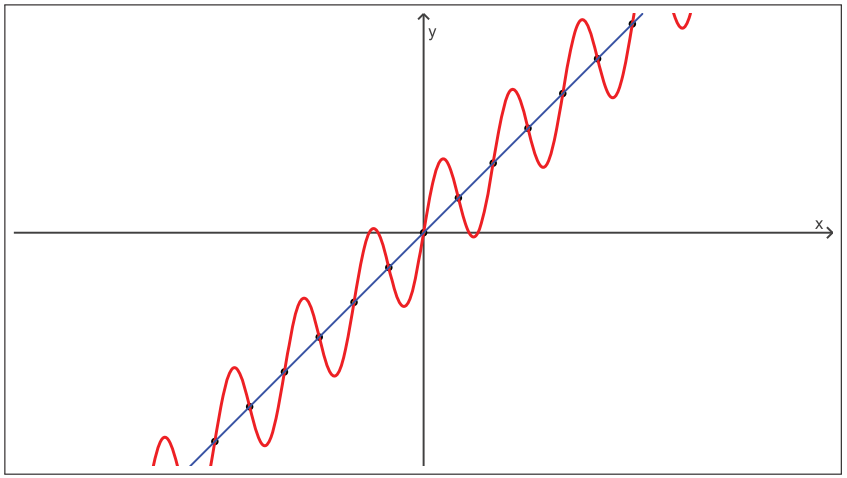
Como construir o gráfico de uma função real?

Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



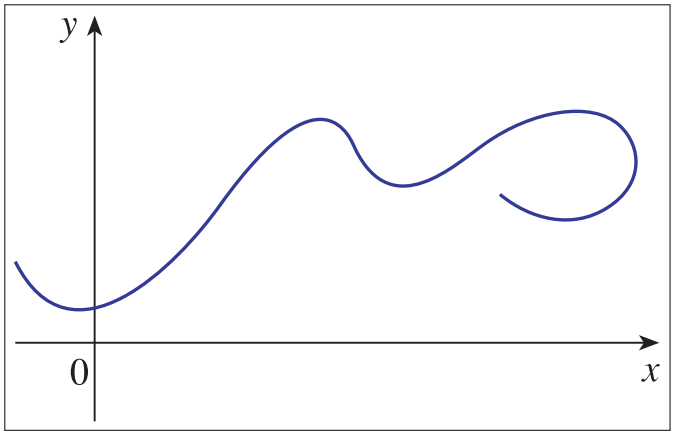
Como construir o gráfico de uma função real?

Veremos mais adiante no curso como as ferramentas de Cálculo podem ser usadas para se construir gráficos de funções!



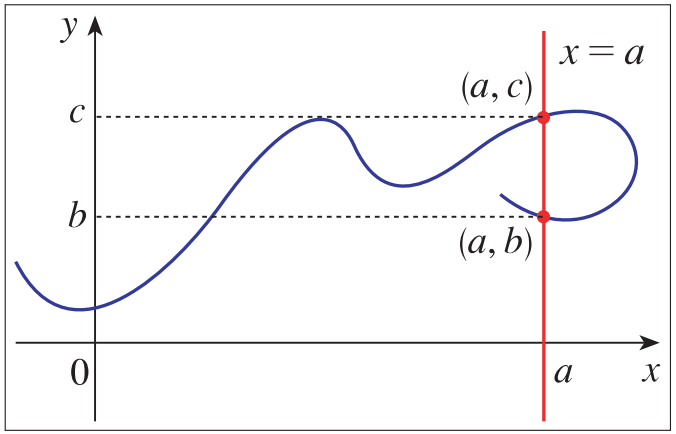
Toda curva é gráfico de uma função real?

A resposta é não!



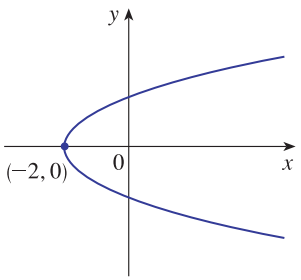
Toda curva é gráfico de uma função real?

A resposta é não!



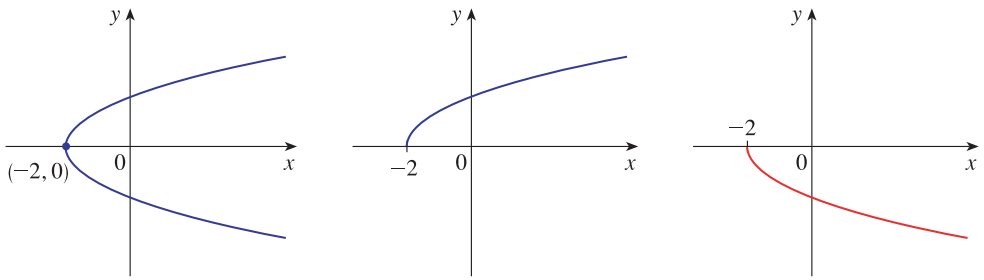
Toda reta vertical corta o gráfico de uma função no máximo em 1 ponto!

Exemplo



(a) $x = y^2 - 2$

Exemplo



(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Revisão: domínio natural (efetivo) de uma função real

Domínio efetivo (natural) de uma função

Convenção

Quando uma função real é definida apenas pela sua lei de associação, convenciona-se que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual é possível avaliar a função e que o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Domínio efetivo (natural) de uma função

Convenção

Quando uma função real é definida apenas pela sua lei de associação, convenciona-se que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual é possível avaliar a função e que o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

O domínio efetivo (natural) de f é $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

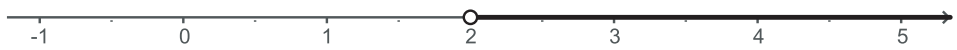
Domínio natural de uma função

Qual é o domínio efetivo (natural) de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$?

$$2x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2.$$

Resposta: o domínio efetivo (natural) de f é

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, +\infty[\; = (2, +\infty)$.



Domínio natural de uma função

Qual é o domínio efetivo (natural) de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{2x-6}{x-1}}}$?

CUIDADO!

$$1 - \frac{2x-6}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{2x-6}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} < 1$$

AQUI!

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 6 < x - 1$$

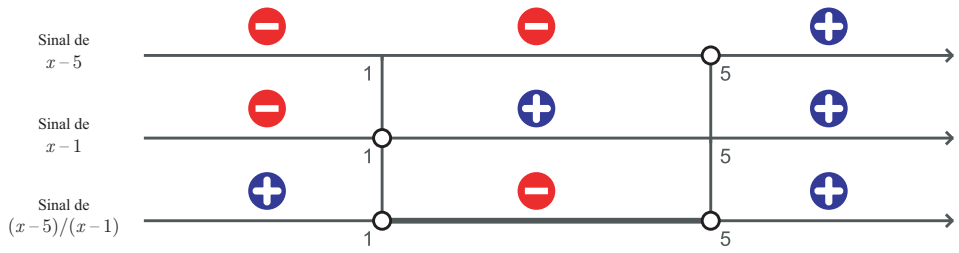
$$\Leftrightarrow \quad 2x - x < -1 + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad x < 5.$$

Existe algo de errado neste desenvolvimento? Sim!

Estudo do sinal

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{x-1} < 0$$



Domínio efetivo (natural) de $f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5)$.

Revisão: estudo do sinal de uma função real

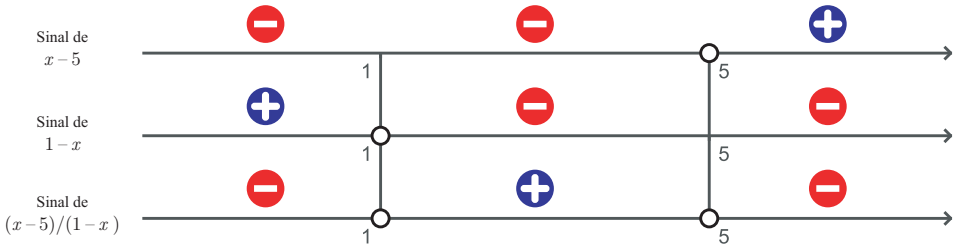
Estudo do sinal

IMPORTANTE!

- Nos exemplos que acabamos de estudar, vimos que para encontrar o domínio efetivo (natural) de função, foi necessário saber resolver uma inequação.
- Saber resolver corretamente inequações é uma habilidade fundamental que você deverá dominar, pois ela será usada em vários momentos em nosso curso (estudo do crescimento e convexidade de funções reais via derivadas)!

Estudo do sinal: outro exemplo

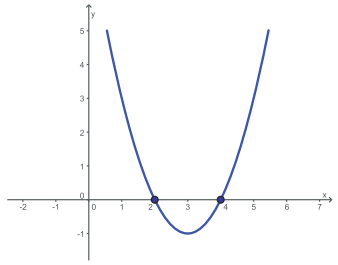
$$\frac{x-5}{1-x} < 0$$

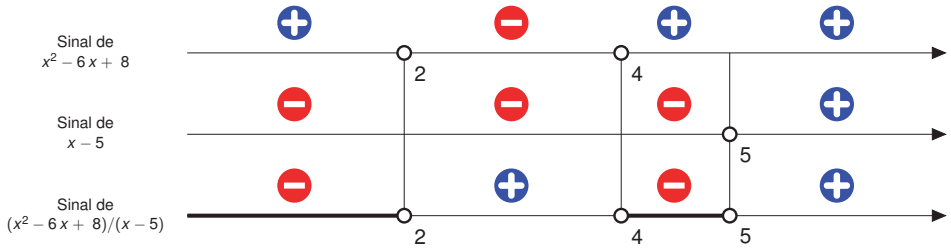


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 5\} =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[= (-\infty, 1)\cup(5, +\infty).$$

Inequações envolvendo funções quadráticas

$$\frac{x^2-6x+8}{x-5} < 0$$





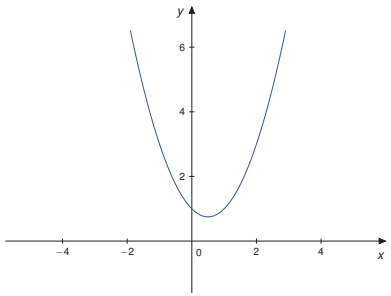
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } (x > 4 \text{ e } x < 5)\} =]-\infty, 2[\ \cup\ ]4, 5[.$$

Inequações envolvendo funções quadráticas

E quando a função quadrática não possui raízes reais?

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

(Note que $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot(1)\cdot(1) = -3 < 0$)



Qual é a solução da inequação $x^2 - x + 1 < 0$? Resposta: $S = \varnothing$.

Qual é a solução da inequação $x^2 - x + 1 > 0$? Resposta: $S = \mathbb{R}$.

Regra de ouro para se resolver inequações

Para resolver uma inequação do tipo

$$\frac{u(x)}{v(x)} < \frac{r(s)}{s(x)}$$

basta, primeiro, usando propriedades válidas dos números reais, convertê-la em uma inequação equivalente da forma

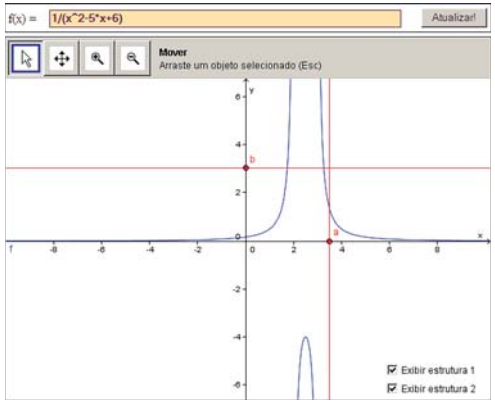
$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0,$$

com f e g funções que podem ser expressas como produtos de funções cujos sinais são fáceis de se obter. Depois, basta usar o esquema do quadro de sinais para fazer estudar o sinal de $f(x)/g(x)$.

Revisão: leitura gráfica do domínio e da imagem de uma função real

Leitura gráfica: domínio e imagem

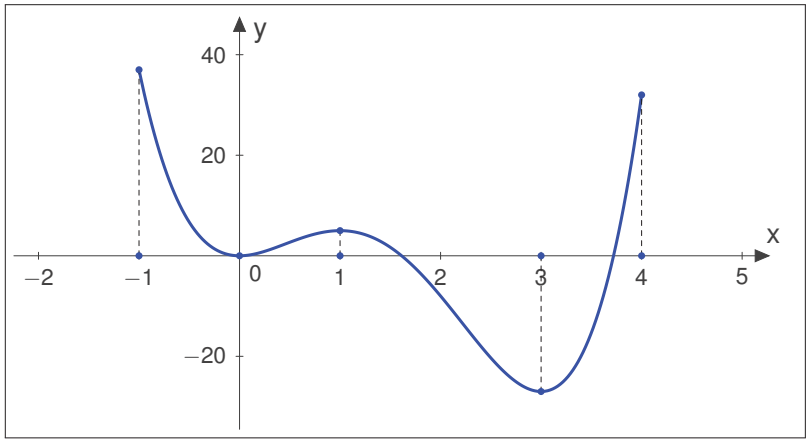
- Como saber se um número real a pertence ao domínio de uma função f?
  Resposta: verifique se a reta vertical $x = a$ intercepta ou não o gráfico de f.
- Como saber se um número real b pertence à imagem de uma função f?
  Resposta: verifique se a reta horizontal $y = b$ intercepta ou não o gráfico de f.



(Ir para o GeoGebra)

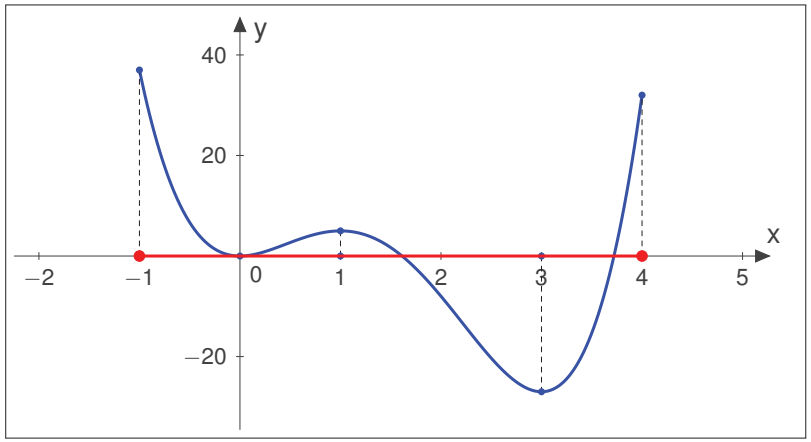
Leitura gráfica: domínio e imagem

Qual é o domínio da função f cujo gráfico é dado abaixo?
(Supondo que a figura exibe todo o gráfico da função!)



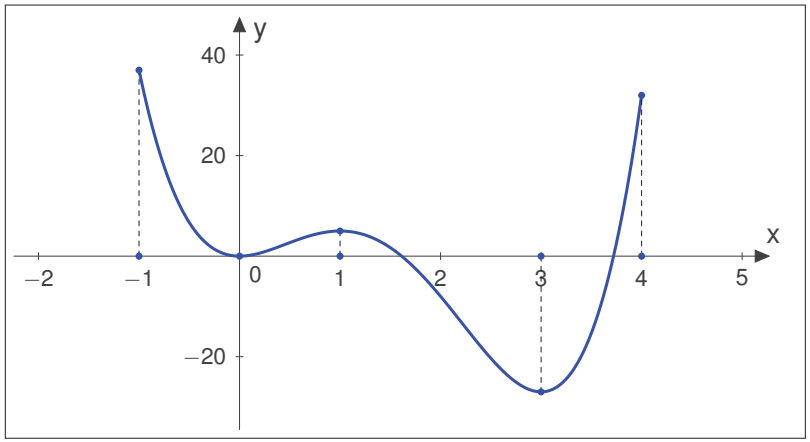
Leitura gráfica: domínio e imagem

Resposta: o domínio da função f é o conjunto $D = [-1, 4]$



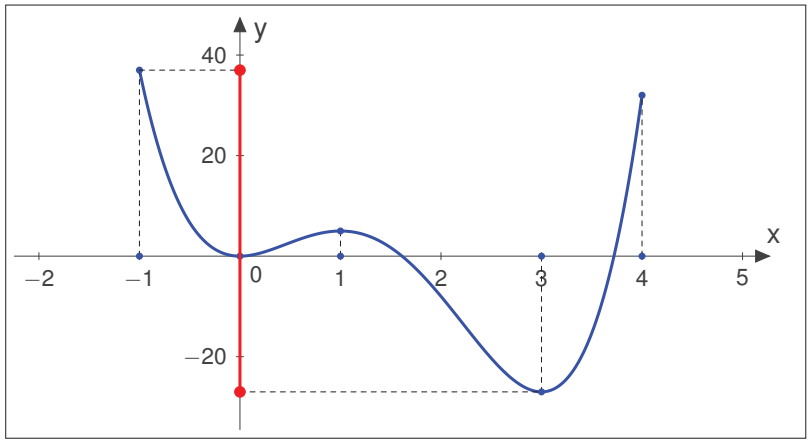
Leitura gráfica: domínio e imagem

Qual é a imagem da função f cujo gráfico é dado abaixo?



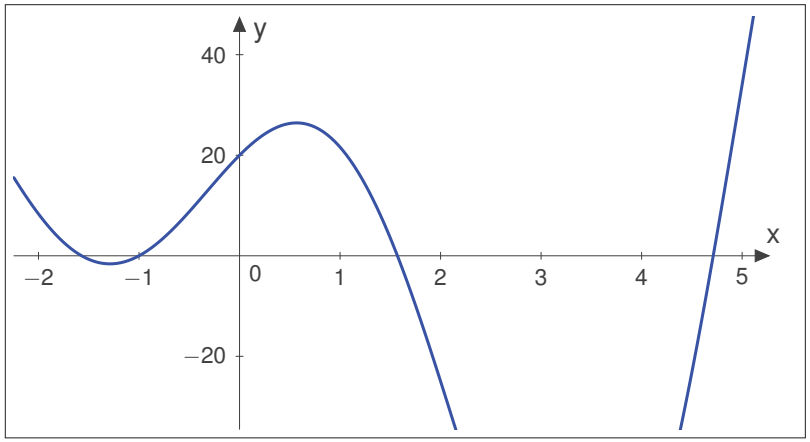
Leitura gráfica: domínio e imagem

Resposta: é o intervalo no eixo y indicado na figura!



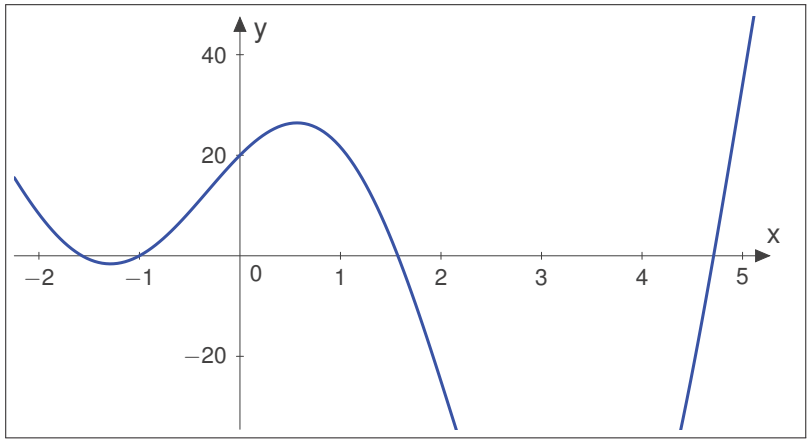
Leitura gráfica: domínio e imagem

Qual é o domínio da função f cujo gráfico é dado abaixo?



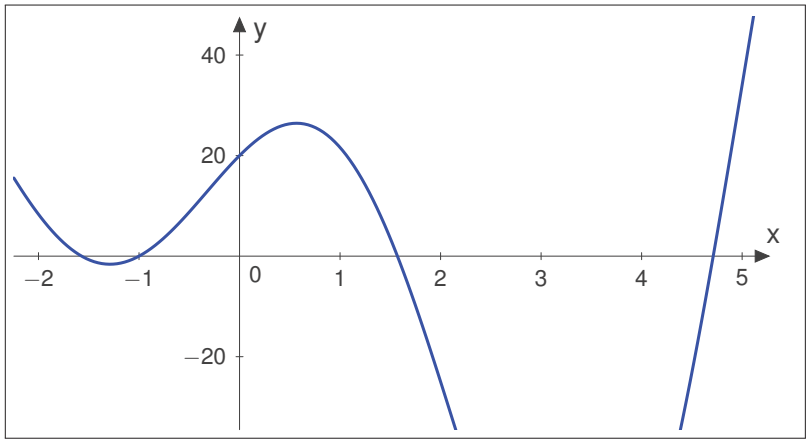
Leitura gráfica: domínio e imagem

Resposta: não é possível determinar
pois apenas uma parte do gráfico está sendo apresentada!



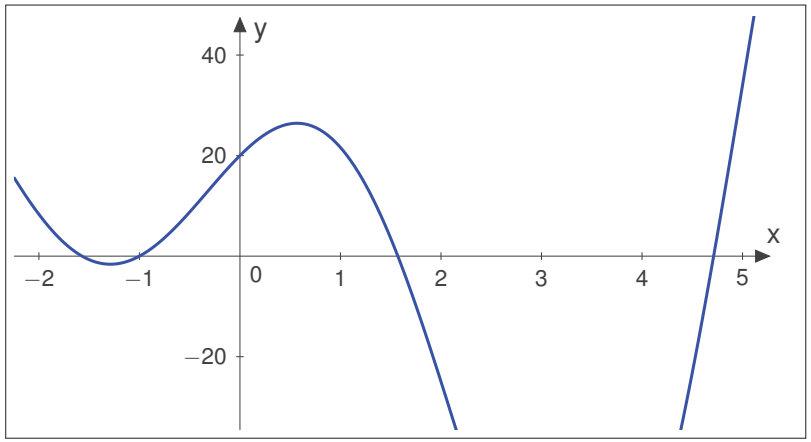
Leitura gráfica: domínio e imagem

Qual é a imagem da função f cujo gráfico é dado abaixo?



Leitura gráfica: domínio e imagem

Resposta: não é possível determinar
pois apenas uma parte do gráfico está sendo exibida!



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

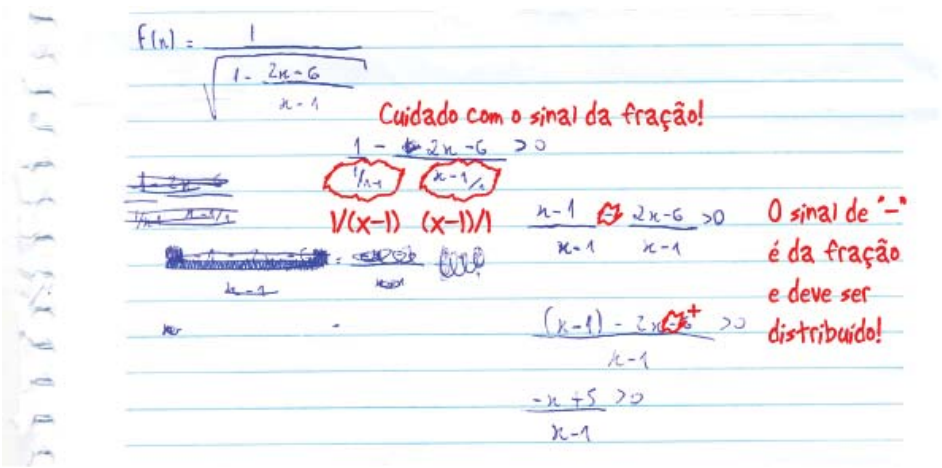
Universidade Federal Fluminense

Parte 2

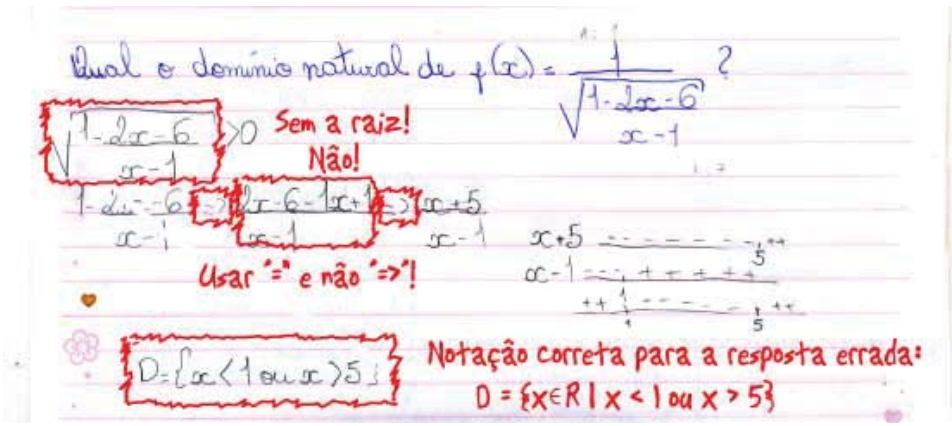
Versão 0.9

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes



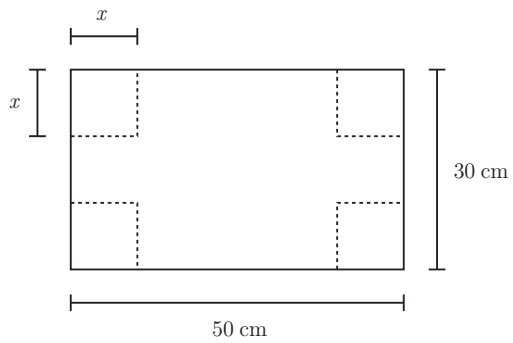
Problemas de organização e erros frequentes



Modelando problemas com funções reais

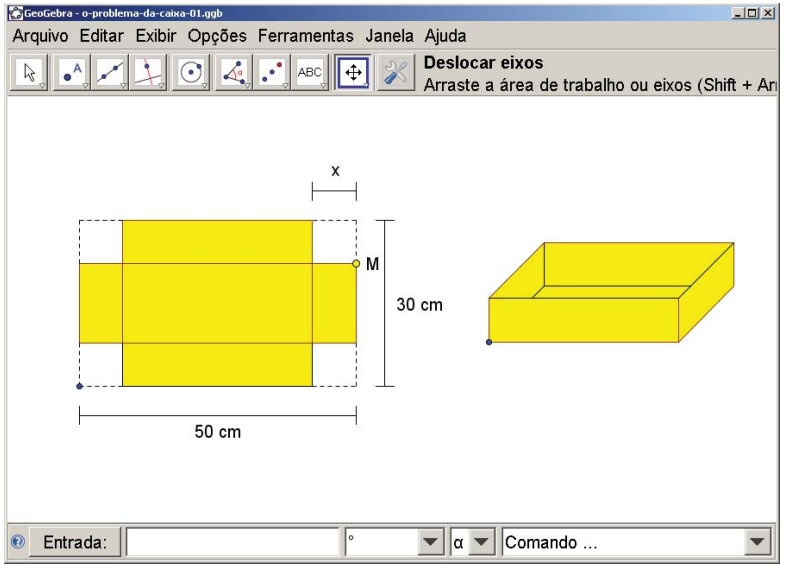
Motivação: o problema da caixa

Você foi contratado por uma empresa que fabrica caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de um folha retangular de papelão medindo 30 cm $\times$ 50 cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão.

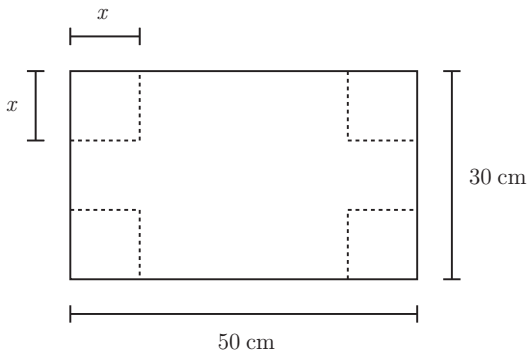


Dependendo do valor de x, diferentes caixas (com diferentes volumes) podem ser confeccionadas. O problema é determinar o valor de x a fim de que a caixa correspondente tenha o maior volume possível.

Motivação: o problema da caixa

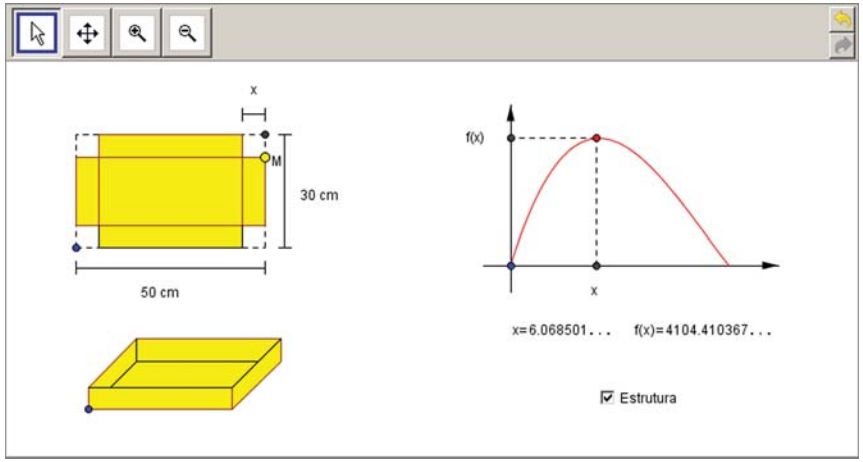


O problema da caixa



Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $x \in D =]0, 15[$.

O problema da caixa



Revisão: função afim

A função afim

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função afim:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x + 3 \end{array}.$$

Proposição

O gráfico de uma função afim $f\colon x \mapsto y = f(x) = ax + b$ é uma reta.

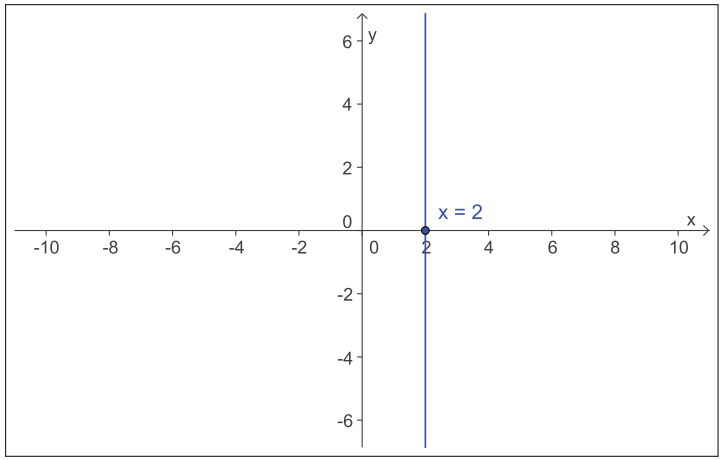
Demonstração (para os interessados):

Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

■

Cuidado!

Todo gráfico de uma função afim é uma reta no plano cartesiano, mas nem toda reta no plano cartesiano é gráfico de uma função afim!



Observações

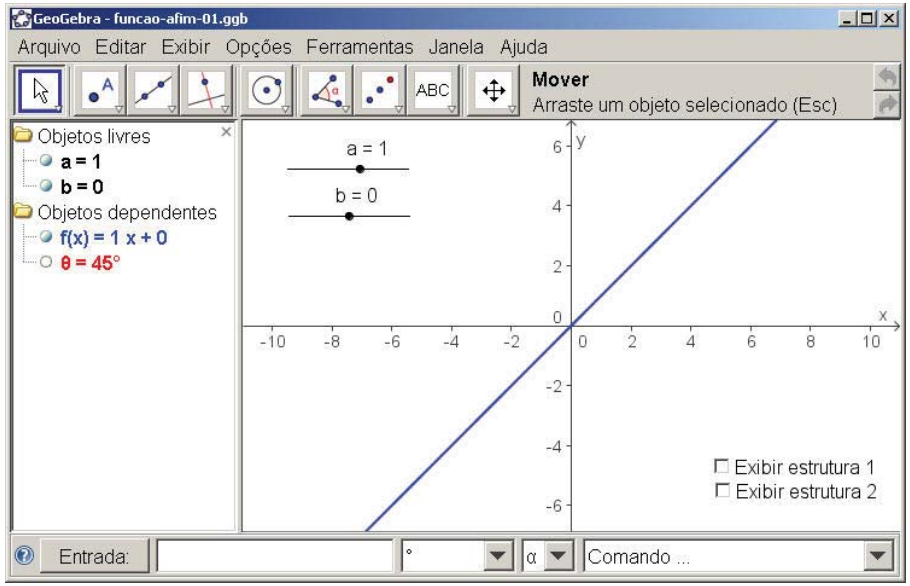
$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

(1) O gráfico de uma função afim é uma reta: a é o coeficiente angular (com relação ao eixo x) e b é o coeficiente linear da reta.

(2) O coeficiente linear b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y.

(3) O coeficiente angular a mede a inclinação da reta: ele é igual a tangente do ângulo entre a reta e o eixo x quando a mesma escala foi usada nos dois eixos coordenados.

A função afim



A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

Solução: se $f(x) = ax + b$, então

$$\begin{cases} f(2) &= 3, \\ f(5) &= 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b &= 3, \\ 5a + b &= 7. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos que

$$a = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{3}.$$

Revisão: função linear

A função linear

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se linear se existe constante $a \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função linear:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array}.$$

Observações

(1) Toda função linear é uma função afim, mas nem toda função afim é uma função linear.

(2) A função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

(3) Se $y = f(x) = a\,x$ é uma função linear, então $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $f(cx) = c\,f(x)$ para todo $c, x \in \mathbb{R}$.

Observações

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f:

$$\begin{array}{ccll}
\cos(x_1 + x_2) & \neq & \cos(x_1) + \cos(x_2), & \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\
\sqrt{x_1 + x_2} & \neq & \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, & \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[, \\
\ln(x_1 + x_2) & \neq & \ln(x_1) + \ln(x_2), & \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[, \\
|x_1 + x_2| & \neq & |x_1| + |x_2|, & \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\
\dfrac{1}{x_1 + x_2} & \neq & \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}, & \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[.
\end{array}$$

Revisão: função modular

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & \text{se } x^2-1 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1, \\ -x^2+1, & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

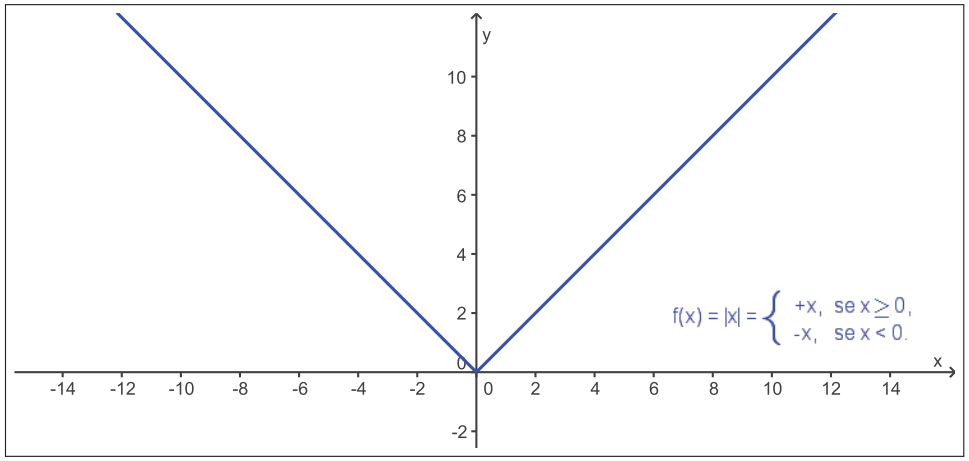
Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Observação:

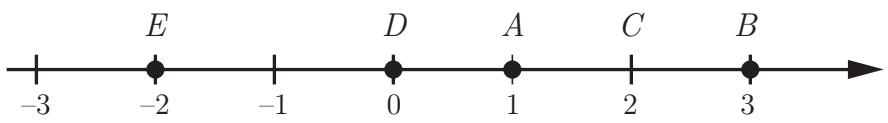
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Gráfico da função modular



Interpretação geométrica



$d(A,B) = +2 \qquad d(B,C) = +1 \qquad d(B,E) = +5 \qquad d(D,E) = +2$

Interpretação geométrica

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

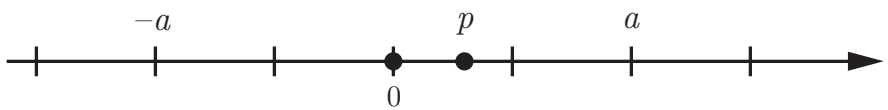
Moral: $|b-a|$ representa a distância entre os números a e b na reta numérica.

Duas propriedades importantes

$$|p| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < p < a$$

$$|p| > a \quad \Leftrightarrow \quad p < -a \ \text{ ou } \ p > a$$

Para justificar estas propriedades,
lembre-se que $|p| = |p-0|$ é a distância entre p e 0.



Aplicação

Resolva a desigualdade $|3+2x| < 2$.

$$|\underbrace{3+2x}_{p}| < 2 \ \Leftrightarrow \ -2 < \underbrace{3+2x}_{p} < 2 \ \Leftrightarrow \ -2-3 < 2x < 2-3$$

$$\Leftrightarrow \ -5 < 2x < -1 \ \Leftrightarrow \ -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$$

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Nem sempre vale a igualdade: se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a+b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$. CUIDADO!

Revisão: função quadrática

A função quadrática

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática se existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função quadrática:

$$
\begin{array}{rccl}
f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
 & x & \mapsto & f(x) = x^2 - x - 1
\end{array}.
$$

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ com } a \neq 0$$

(1) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

(2) O coeficiente c é a ordenada do ponto de interseção da parábola com o eixo y.

(3) Se o coeficiente a é > 0, a parábola é côncava para cima. Se a é < 0, ela é côncava para baixo.

(4) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$, então a parábola não intercepta o eixo x.

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

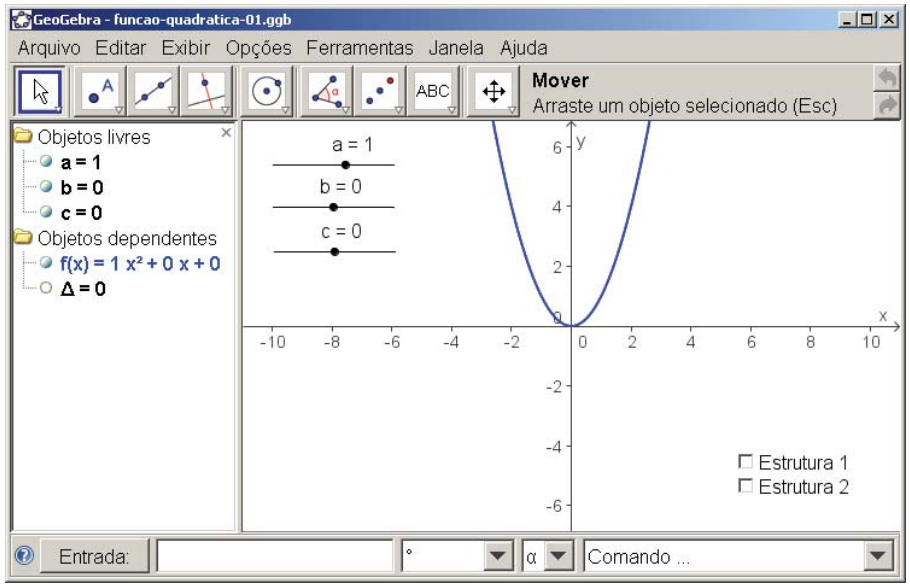
(5) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$, então a parábola intercepta o eixo x em dois pontos de abscissas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}.$$

(6) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$, então a parábola intercepta o eixo x no ponto de abscissa:

$$x_1 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

A função quadrática



Revisão: completamento de quadrados

Completamento de quadrados: exemplo 1

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 8\,x + 15 &= \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 15 \\ &= \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + 16\right) - 16 + 15 \\ &= \left(x - 4\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 2

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3\,x + 2 &= \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 2 \\ &= \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 3

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} 2\,x^2 - 3\,x + 1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\,x\right) + \ 1 \\ &= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 1 \\ &= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 4

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} -\,x^2 + 2\,x - 1 &= -\left(x^2 - 2\,(x)\right) - 1 \\ &= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ ?\ \right) + \ ?\ - 1 \\ &= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ 1\ \right) + \ 1\ - 1 \\ &= -\left(x - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \ ?\ \right) - \ ?\ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \ ?\ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \frac{b^2}{4\,a} + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4\,a} - c\right) \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2 - 4\,ac}{4\,a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4\,a}\right)
\end{aligned}
$$

Revisão: funções trigonométricas

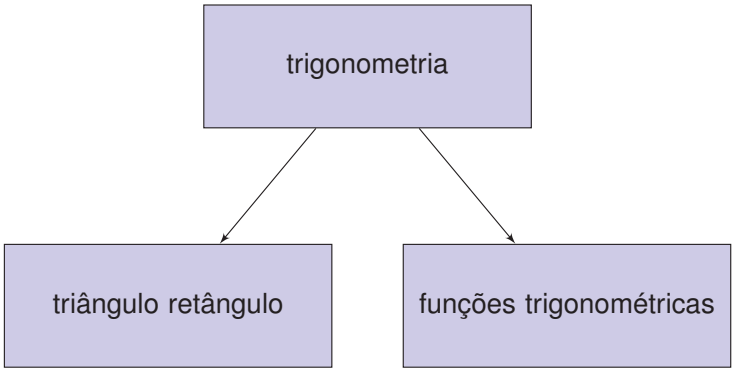
As funções trigonométricas

O que faremos aqui é uma revisão muito rápida!

Para os interessados em definições mais precisas e justificativas, recomendamos o livro:

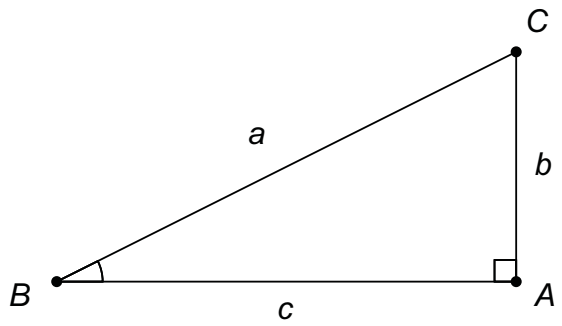
Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

Trigonometria



(seno de um ângulo) (seno de um número real)

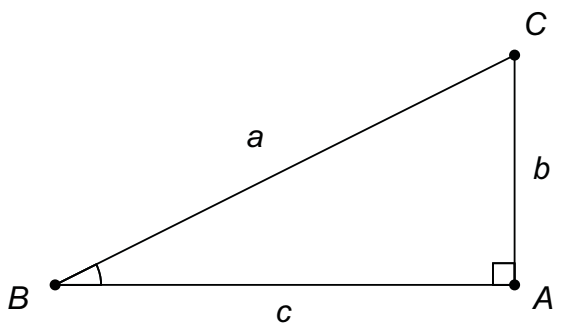
Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo



$$\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \qquad \cos(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}.$$

Identidade trigonométrica fundamental



$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} \overset{(*)}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

onde, em $(*)$, usamos o Teorema de Pitágoras.

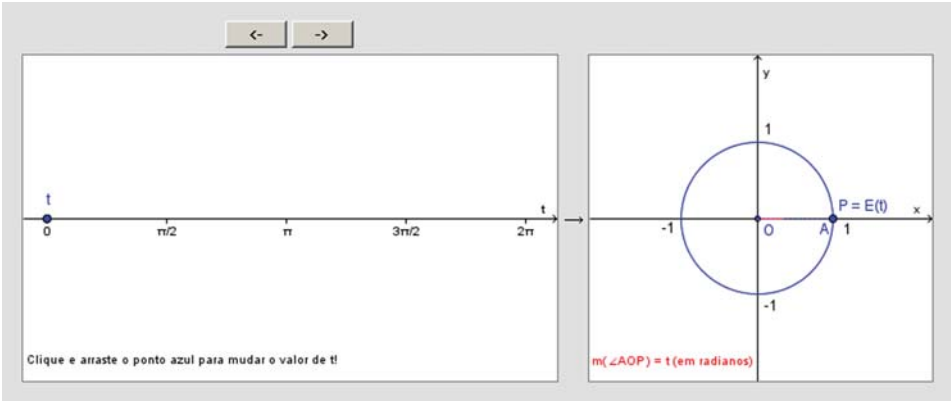
Notações

$$\cos^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\cos(\widehat{B})\right)^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2.$$

A identidade trigonométrica fundamental fica então escrita assim:

$$\cos^2(\widehat{B}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{B}) = 1.$$

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos



http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-euler-br.html

ou

http://www.cdme.im-uff.mat.br/ftr/ftr-html/ftr-euler-br.html

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em $\mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0)$ em C.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

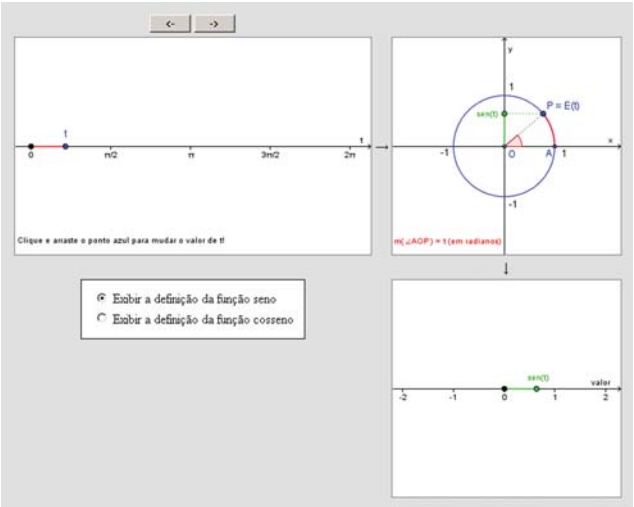
Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em $\mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0)$ em C.

Escrevendo $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e, para cada t em $\mathbb{R}$, $P = E(t)$, dizemos neste caso que o ângulo AOP mede t radianos.

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)



http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-def-br.html

ou

http://www.cdme.im-uff.mat.br/ftr/ftr-html/ftr-def-br.html

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em $\mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em $\mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em $\mathbb{R}$:

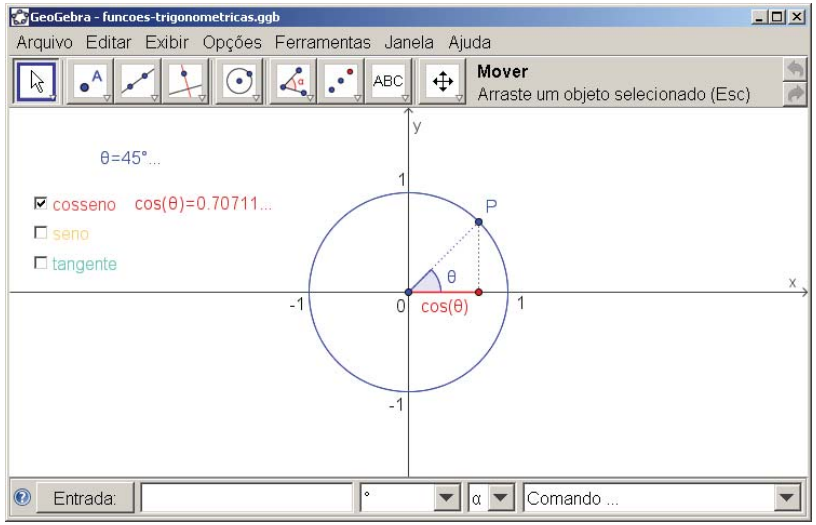
$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária. Note que, aqui, o número real t dá a medida do ângulo AOP em radianos!.

Revisão: função cosseno

A função cosseno

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$



A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

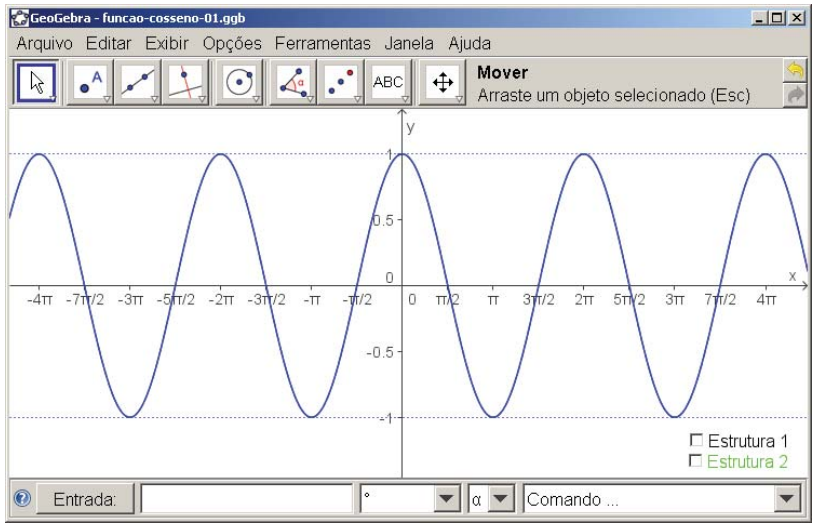
$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cosseno é uma função periódica: $\cos(x+2\pi) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

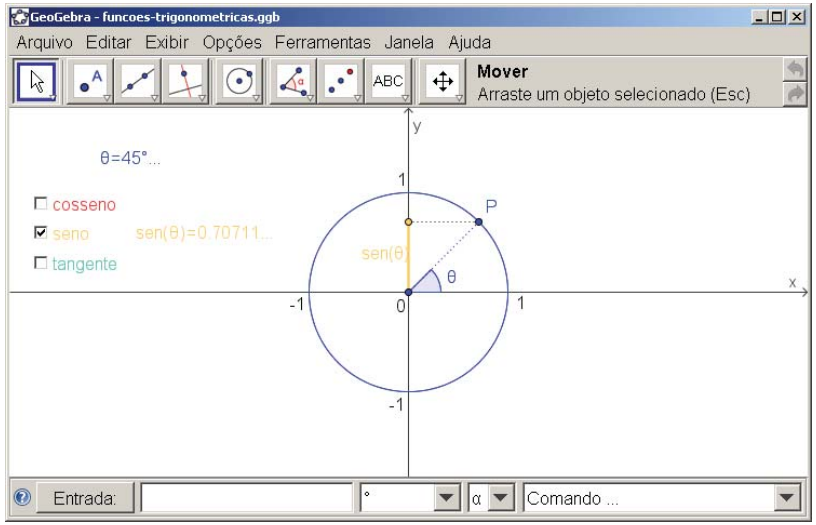
A função cosseno



Revisão: função seno

A função seno

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$



A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

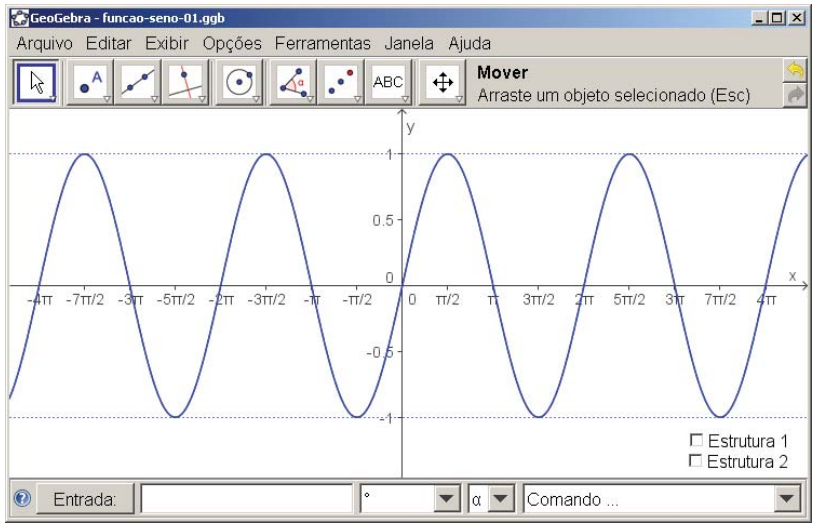
$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seno é uma função periódica: $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

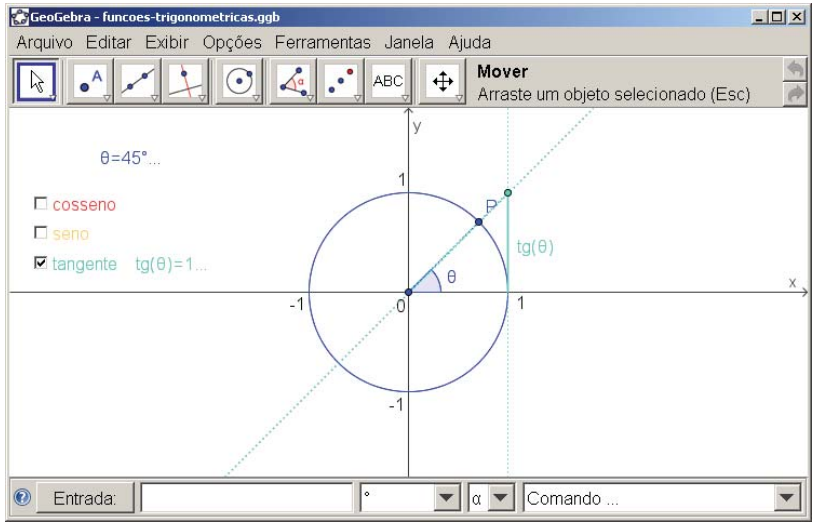
A função seno



Revisão: função tangente

A função tangente

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) = \operatorname{sen}(x)/\cos(x) \end{array}$$



A função tangente

$$\operatorname{tg}(0) = 0, \quad \operatorname{tg}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

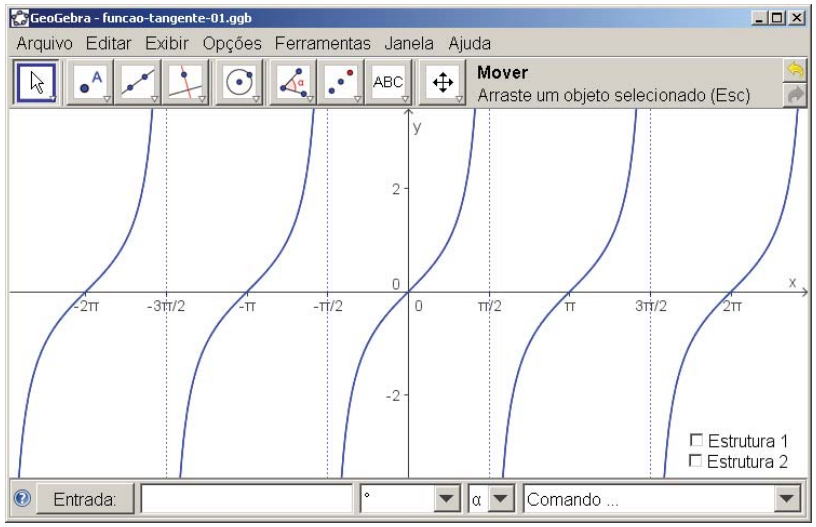
$$\operatorname{tg}(90) = \operatorname{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = (\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b))/(1 - \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)).$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x), \quad \forall x \in D = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tangente é uma função periódica: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x), \forall x \in D$.

A função tangente



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 3

Versão 0.9

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes

Tiago Nascimento da Silva

• $|2x+5|>3$ Regra errada!

$-3>2x+5>3$

$-3-5>2x>-5+3$

$-8>2x>-2$

$-4>1x>-1$

$S=\{-4>x>-1\}$

Notação correta para a resposta errada:

$D=\{x\in R \mid -4>x>-1\}$

Problemas de organização e erros frequentes

Resolva a desigualdade

$|2x+5|>3$

$p<-a$ ou $p>a$

$2x+5<-3$ ou $2x+5>3$

$2x<-8$ ou $2x>-2$

$x<-4$ ou $x>-1$

$S=]-\infty,-4[$ ou $]-1,+\infty[$ Usar 'U'!

Problemas de organização e erros frequentes

$-|2x-5|<-4$ $|2x-5|>4$

$2x-5<-4$ ou $2x-5>4$

$2x<1$ ou $2x>9$

$x<1/2$ ou $x>9/2$

$S=\{x\in\mathbb{R} \mid x<1/2 \cup x>9/2\}$ Usar 'ou'!

Problemas de organização e erros frequentes

3) $|2x+5|>3$

$2x+5<-3$ ou $2x+5>3$

$2x<-3-5$ ou $2x>-5+3$

$2x<-8$ ou $2x>-2$

$x<-4$ ou $x>-1$

$S=\boxed{]\ x<-4 \text{ ou } x>-1\ [}$

Notação errada!

Problemas de organização e erros frequentes

ex. $|2x+5|>3$

$2x+5>3$, ou $2x+5<-3$

$2x>-2$ ou $2x<-8$

$x>-1$ ou $x<-4$

$S=\boxed{\{x>-1 \text{ ou } x<-4\}}$

Notação errada!

$S=]-\infty,-4[\cup]-1,+\infty[$

Usar "="!

VIRE →

Problemas de organização e erros frequentes

$3+2x<2 \rightarrow -3-2x<2$ Organização?

$3+2x<2$ $x>5$ Usar "e" ou "ou"?

$x<-1$ Respostas?

$|2x+5|>3$

$2x+5>3$ $-2x-5>3$

$x>-1$ $x<-4$

$|2x-3|=5x-1$

$2x-3=5x-1$ $2x-3=-5x+1$

$x=3$ $x=4$

3 7

Revisão: função exponencial

A função exponencial

O que faremos aqui é uma revisão muito rápida!

Para os interessados em definições mais precisas e justificativas, recomendamos o livro:

Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

A função exponencial

$$y = f(x) = a^x \text{ com } a > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

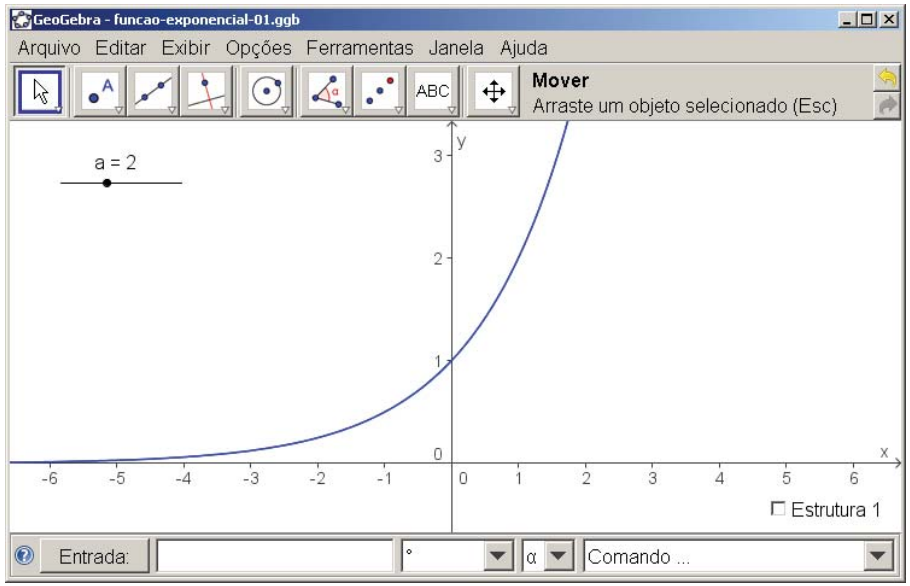
(1) Vale que $f(0) = a^0 = 1$, para todo $a > 0$. Temos também que $f(x) = a^x > 0$ para todo $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

(2) Vale que $f(p)^q = (a^p)^q = a^{p \cdot q} = f(p \cdot q)$.

(3) Vale que $\dfrac{1}{f(p)} = \dfrac{1}{a^p} = a^{-p} = f(-p)$.

(4) Vale que $f(p+q) = a^{p+q} = a^p \cdot a^q = f(p) \cdot f(q)$.

A função exponencial



Revisão: função logarítmica

A função logarítmica

$$y = f(x) = \log_a(x) \text{ com } a > 0, a \neq 1 \text{ e } x > 0.$$

(1) Vale que $f(1) = \log_a(1) = 0$ e $f(a) = \log_a(a) = 1$, para todo $a > 0$.

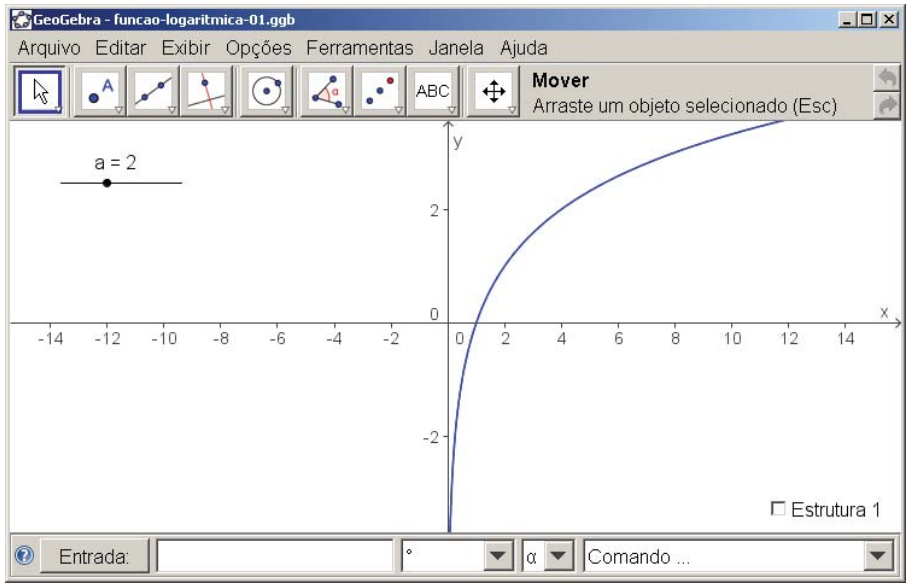
(2) Vale que $f(p \cdot q) = \log_a(p \cdot q) = \log_a(p) + \log_a(q), \ \forall p, q > 0$.

(3) Vale que $f(x^r) = \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x), \ \forall x > 0$ e $\forall r \in \mathbb{R}$.

(4) Vale que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a(p) - \log_a(q), \ \forall p, q > 0$.

(5) Vale que $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \ \forall x, b > 0, b \neq 1$.

A função logarítmica



A função logarítmica

IMPORTANTE!

- $\ln(x)$ é uma notação para $\log_e(x)$, onde $e = 2.7182818284\ldots$! O logaritmo de base e é denominado logaritmo natural.
- $e^{\ln(x)} = x$ para todo $x > 0$ (pois $x \mapsto e^x$ e $x \mapsto \ln(x)$ são funções inversas uma da outra). Em particular: $e^{\ln(\square)} = \square$ e $e^{\ln(x^x)} = x^x$, para todo $\square, x > 0$.
- $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pois $x \mapsto e^x$ e $x \mapsto \ln(x)$ são funções inversas uma da outra).

Revisão: função par e função ímpar

Função par

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é par se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Exemplo de função par:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 1 - x^4 \end{array}.$$

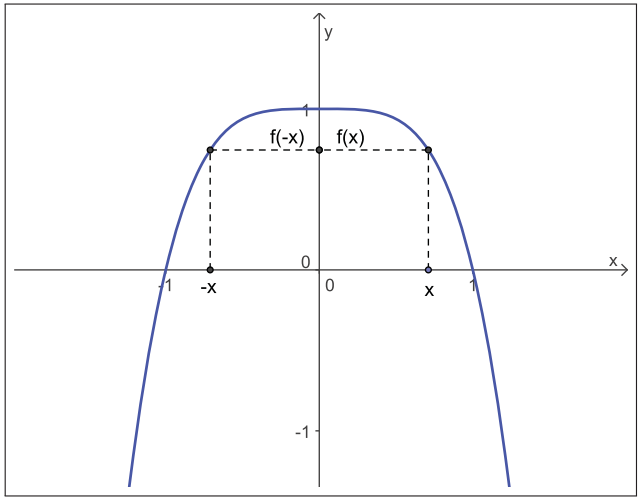
De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x).$$

Note que a definição de função par pressupõe que o domínio D seja simétrico com relação a origem 0: se x pertence a D, então $-x$ também deve pertencer a D.

Função par

O gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo y!



Função ímpar

Definição

Uma função real $f\colon D \to C$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Exemplo de função ímpar:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^5 + x \end{array}.$$

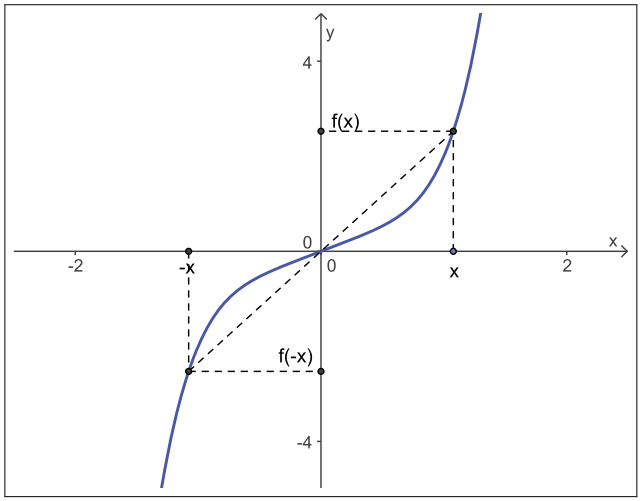
De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x).$$

Note que a definição de função ímpar pressupõe que o domínio D seja simétrico com relação a origem 0: se x pertence a D, então $-x$ também deve pertencer a D.

Função ímpar

O gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem!



Observações

Existem funções que não são pares e nem ímpares:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2 - x^3 \end{array}.$$

De fato:

$$f(-1) = 3 \neq 1 = f(1) \qquad \text{e} \qquad f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1).$$

Observações

Existe um função que seja par e ímpar ao mesmo tempo?

Sim! A função identicamente nula definida em $\mathbb{R}$!

Toda função definida em $\mathbb{R}$ se escreve como soma de uma função par e uma função ímpar:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{ímpar}}.$$

Exercício

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3}$ definida em $\mathbb{R} - \{0\}$ é par? Ela é ímpar?

Justifique sua resposta!

Solução. A função f é ímpar, pois

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-3}{(-x)^3} = -\frac{x^2-3}{x^3} = -f(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

A função não é par, pois $f(-1) = 2 \neq -2 = f(1)$.

Revisão: funções da forma x elevado a n, com $n \in \mathbb{N}$

Funções da forma $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^n \end{array}$$

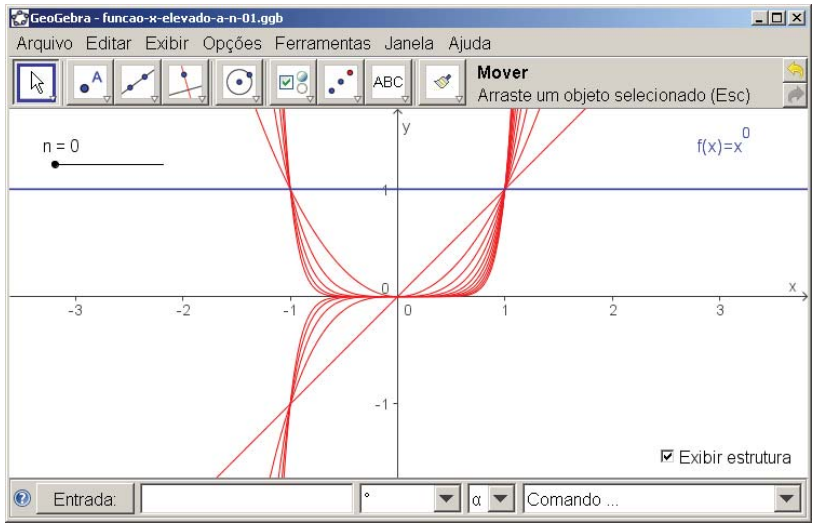
Importante: se $n \in \mathbb{N}$, x^n é uma notação para $\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ fatores}}$.

Propriedades:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}, x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.
Prova:
$x^n \cdot x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n+m \text{ fatores}} = x^{n+m}$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (x^n)^m = x^{n \cdot m}$.
Prova: exercício!

Funções da forma $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$



Funções da forma $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$

$$y = f(x) = x^n \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

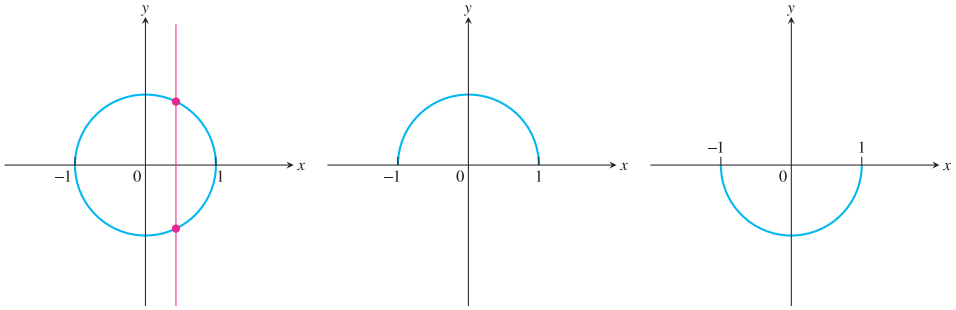
(1) f é uma função par se n é um número par e f é uma função ímpar se n é um número ímpar.

(2) Se $0 < x < 1$, então $0 < x^{n+1} < x^n$ (basta multiplicar $0 < x < 1$ por $x^n > 0$).

(3) Se $1 < x$, então $x^n < x^{n+1}$ (basta multiplicar $1 < x$ por $x^n > 0$).

Revisão: círculos e semicírculos

Círculos e semicírculos



(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

Moral: o gráfico de $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ é o semicírculo superior de centro na origem e raio $|a|$.

Novas funções a partir de antigas: transformações de funções

Transformações de funções

Objetivo:

dado o gráfico de uma função $y = f(x)$ e uma constante c, obter os gráficos das funções

$$y = f(x + c), \quad y = f(x) + c, \quad y = c \cdot f(x), \quad y = f(c \cdot x),$$
$$y = f(|x|) \quad \text{e} \quad y = |f(x)|.$$

Caso $g(x) = f(x + c)$

Transformações de funções: $g(x) = f(x + c)$

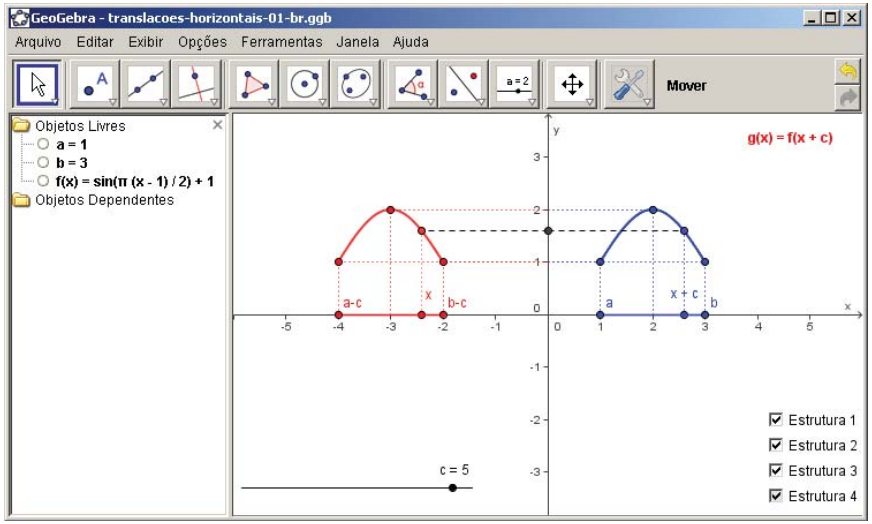
Se f está definida no intervalo $[1, 3]$ e $c = 5$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(x + c) = f(x + 5)$?

$$\begin{aligned} x \in \text{domínio de } g \quad &\Leftrightarrow \quad x + c \in \text{domínio de } f \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x + c \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - c \leq x \leq 3 - c \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1 - c, 3 - c] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [-4, -2]. \end{aligned}$$

Se f está definida no intervalo $[1, 3]$ e $c = -3$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(x + c) = f(x - 3)$?

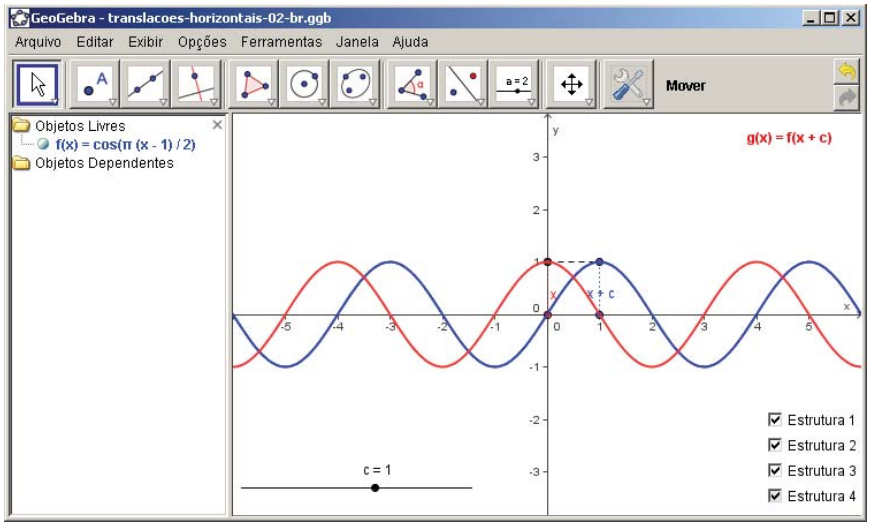
$$x \in \text{domínio de } g \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1 - c, 3 - c] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [4, 6].$$

Transformações de funções: $g(x) = f(x + c)$



(Ir para o GeoGebra)

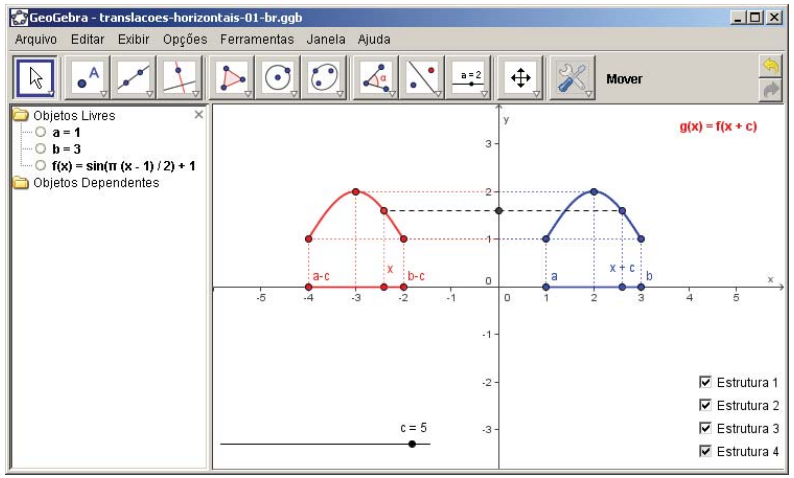
Transformações de funções: $g(x) = f(x + c)$



(Ir para o GeoGebra)

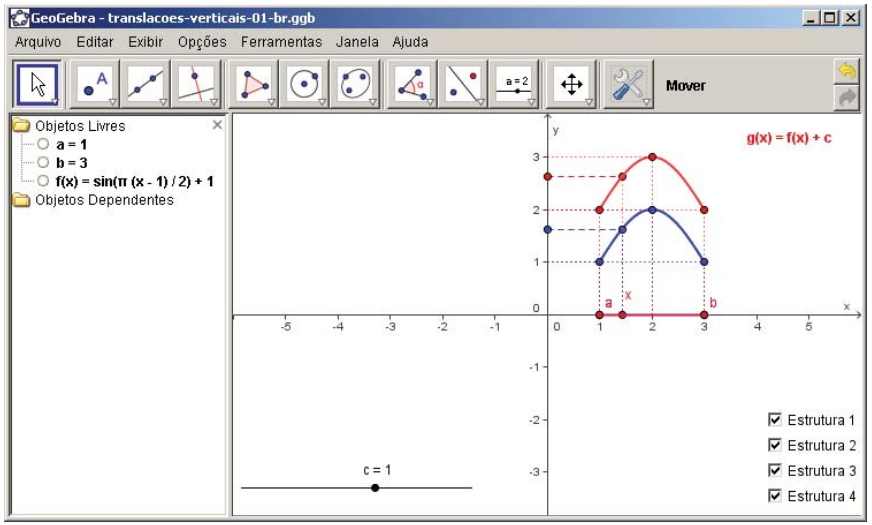
Moral

Somar uma constante c a variável independente x de uma função f tem o efeito geométrico de transladar horizontalmente para a direita (quando $c < 0$) ou para a esquerda (quando $c > 0$) o gráfico de f.



Caso $g(x) = f(x) + c$

Transformações de funções: $g(x) = f(x) + c$



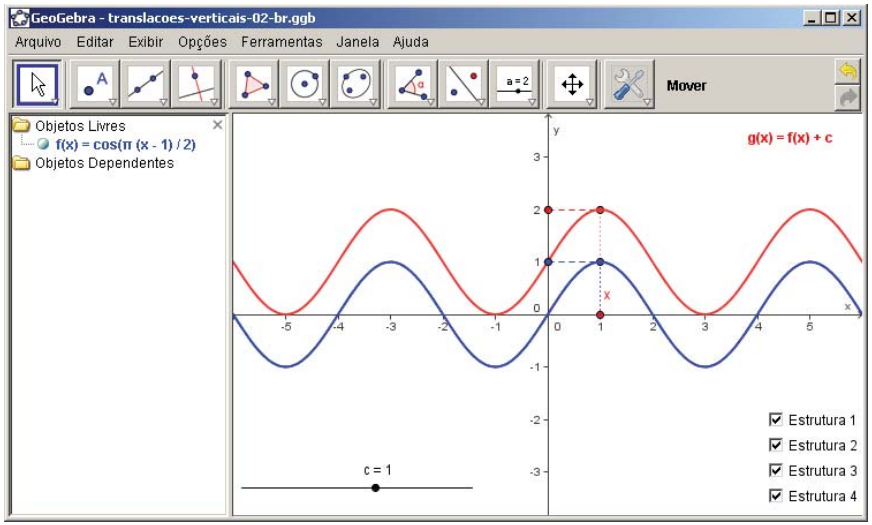
(Ir para o GeoGebra)

Transformações de funções: $g(x) = f(x) + c$

Se f está definida no intervalo $[1, 3]$ e $c = 1$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(x) + 1$?

$$x \in \text{domínio de } g \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{domínio de } f \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1, 3].$$

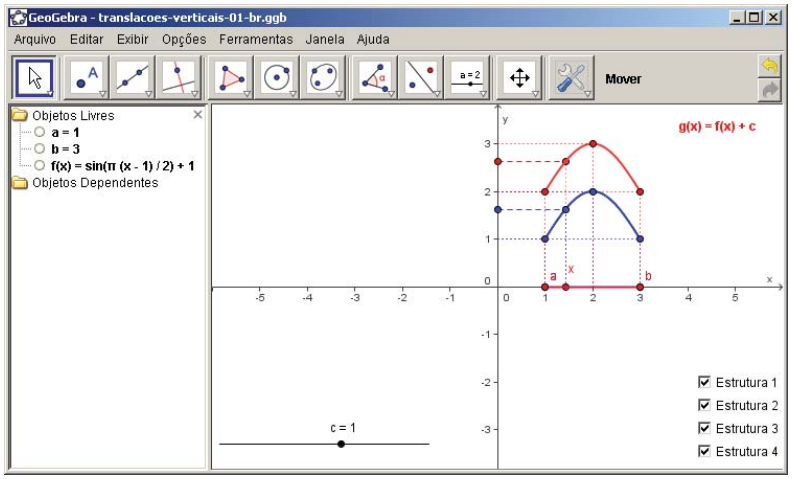
Transformações de funções: $g(x) = f(x) + c$



(Ir para o GeoGebra)

Moral

Somar uma constante c a uma função f tem o efeito geométrico de transladar verticalmente para cima (quando $c > 0$) ou verticalmente para baixo (quando $c < 0$) o gráfico de f.



Caso $g(x) = f(c \cdot x)$

Transformações de funções: $g(x) = f(c \cdot x)$

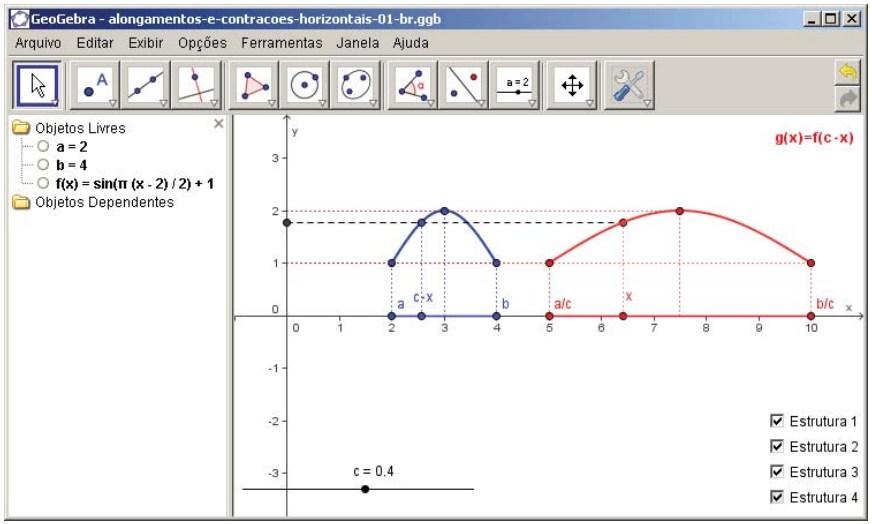
Se f está definida no intervalo $[2, 4]$ e $c = 0.4$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(c \cdot x) = f(0.4 \cdot x)$?

$$\begin{aligned} x \in \text{domínio de } g \quad &\Leftrightarrow \quad c \cdot x \in \text{domínio de } f \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq c \cdot x \leq 4 \\ &\overset{(c>0)}{\Leftrightarrow} \quad 2/c \leq x \leq 4/c \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2/c, 4/c] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [5, 10]. \end{aligned}$$

Se f está definida no intervalo $[2, 4]$ e $c = 4$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(c \cdot x) = f(4 \cdot x)$?

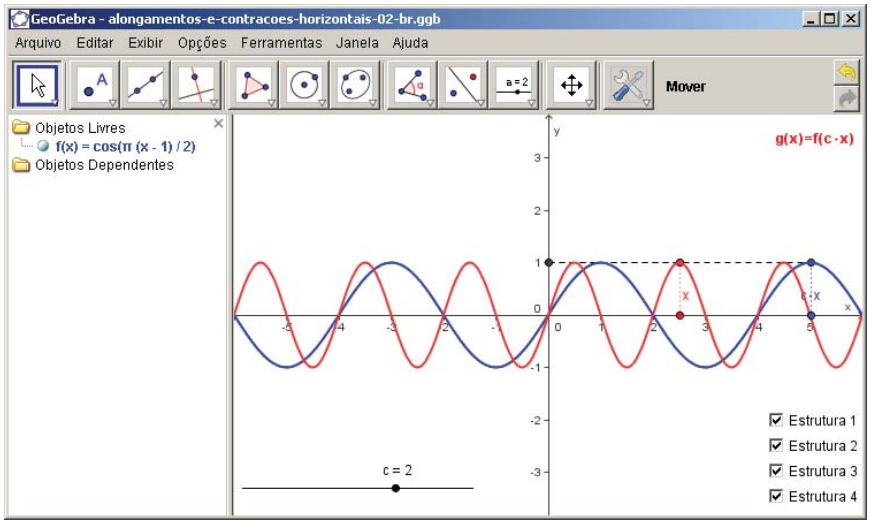
$$x \in \text{domínio de } g \quad \overset{(c>0)}{\Leftrightarrow} \quad x \in [2/c, 4/c] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1/2, 1].$$

Transformações de funções: $g(x) = f(c \cdot x)$



(Ir para o GeoGebra)

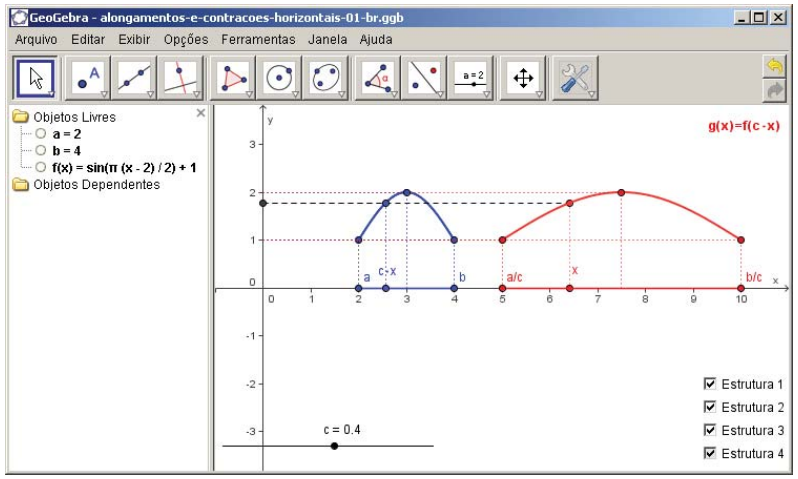
Transformações de funções: $g(x) = f(c \cdot x)$



(Ir para o GeoGebra)

Moral

Multiplicar a variável independente de uma função f por uma constante não-negativa c tem o efeito geométrico de alongar (para $0 < c < 1$) ou comprimir (para $c > 1$) horizontalmente o gráfico de f.



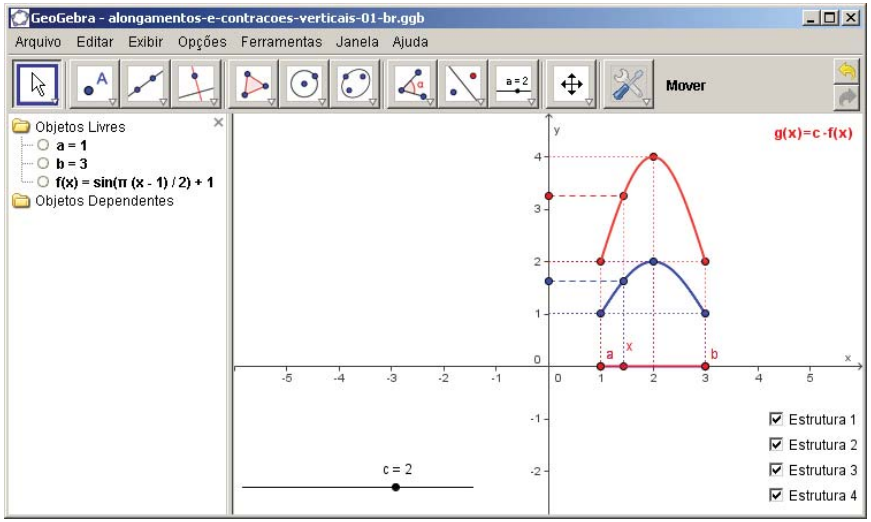
Caso $g(x) = c \cdot f(x)$

Transformações de funções: $g(x) = c \cdot f(x)$

Se f está definida no intervalo $[1, 3]$ e $c = 2$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = 2 \cdot f(x)$?

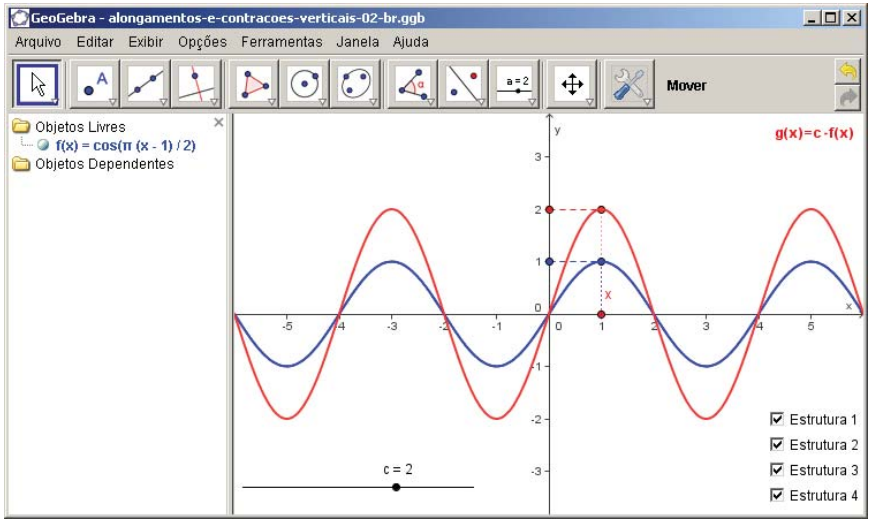
$$x \in \text{domínio de } g \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{domínio de } f \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1, 3].$$

Transformações de funções: $g(x) = c \cdot f(x)$



(Ir para o GeoGebra)

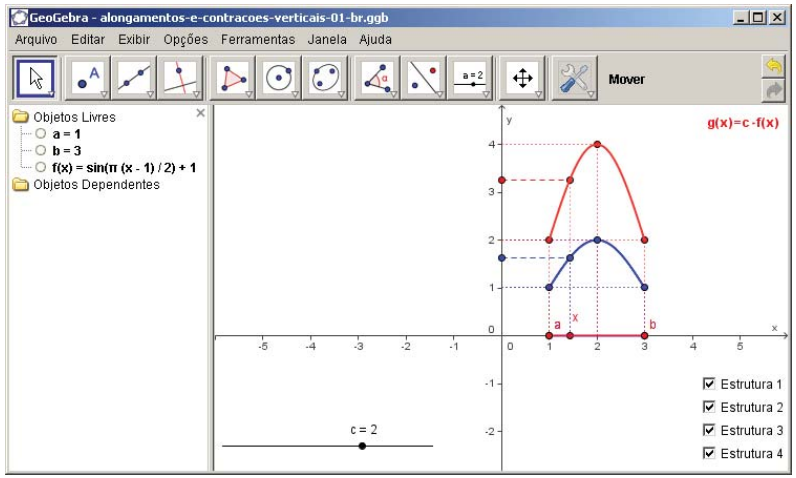
Transformações de funções: $g(x) = c \cdot f(x)$



(Ir para o GeoGebra)

Moral

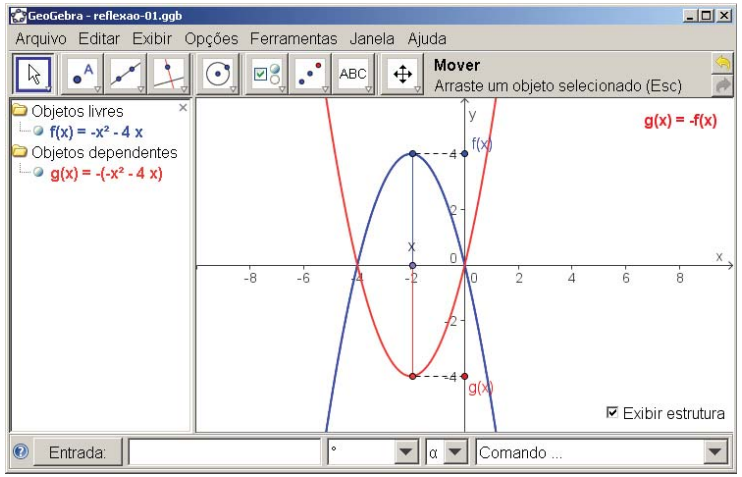
Multiplicar uma função f por uma constante não-negativa c tem o efeito geométrico de alongar (para $c > 1$) ou comprimir (para $0 < c < 1$) verticalmente o gráfico de f.



Caso $g(x) = -f(x)$

Transformações de funções: $g(x) = -f(x)$

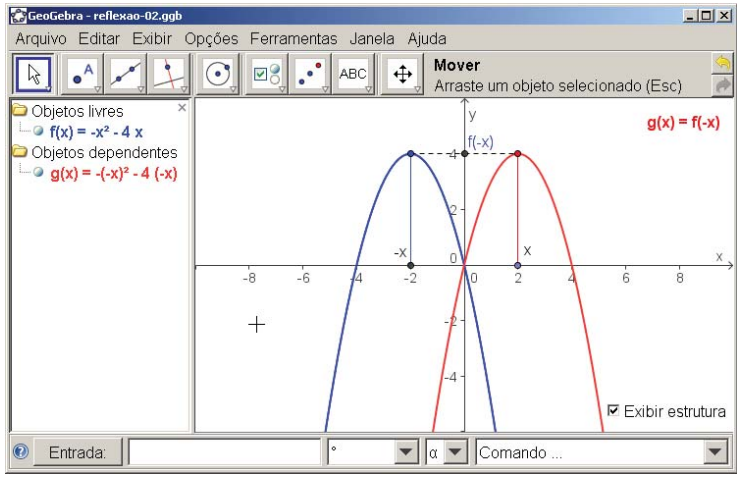
Multiplicar uma função f por -1 tem o efeito geométrico de refletir com relação ao eixo-x o gráfico de f.



Caso $g(x) = f(-x)$

Transformações de funções: $g(x) = f(-x)$

Multiplicar a variável independente x de uma função f por -1 tem o efeito geométrico de refletir com relação ao eixo-y o gráfico de f.

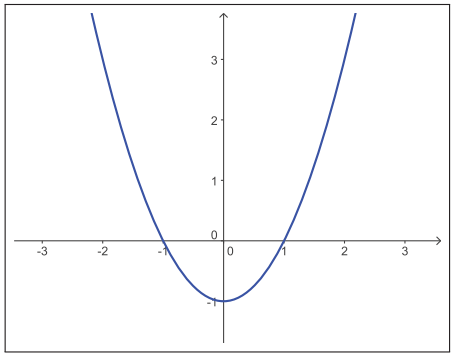


Caso $g(x) = |f(x)|$

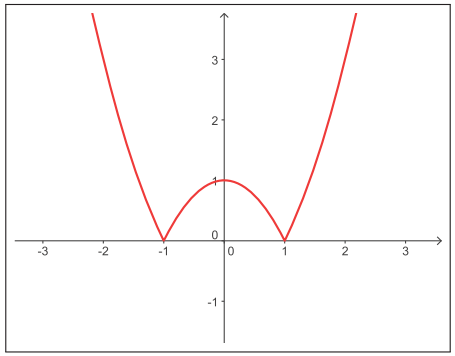
Transformações de funções: $g(x) = |f(x)|$

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} +f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

$f(x) = x^2 - 1$



$g(x) = |f(x)| = |x^2 - 1|$

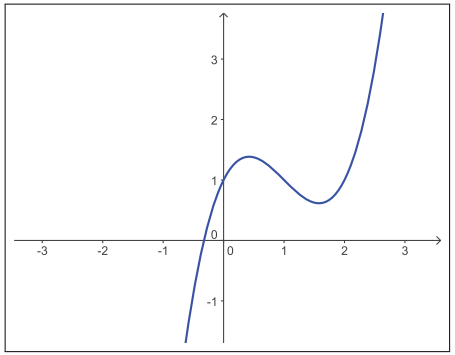


Caso $g(x) = f(|x|)$

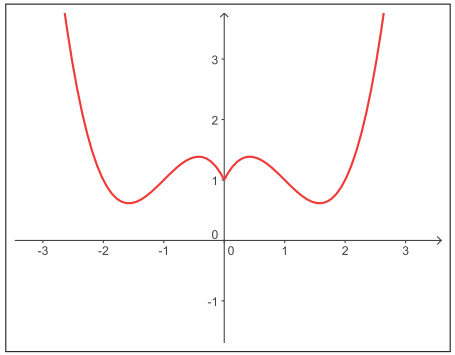
Transformações de funções: $g(x) = f(|x|)$

$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(+x), & \text{se } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 2\,x + 1$



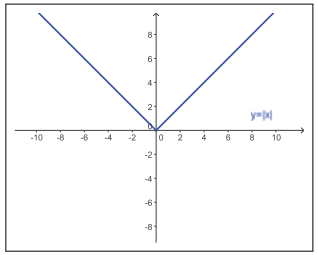
$g(x) = f(|x|) = |x|^3 - 3\,|x|^2 + 2\,|x| + 1$



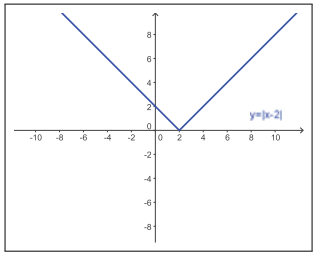
Exercício resolvido

Exemplo: esboce o gráfico de $y = 4 - |x - 2|$

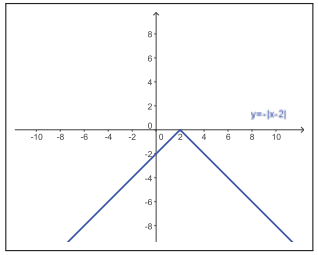
$y = f(x) = |x|$



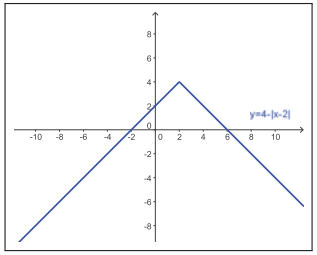
$y = g(x) = f(x-2) = |x-2|$



$y = h(x) = -g(x) = -|x-2|$

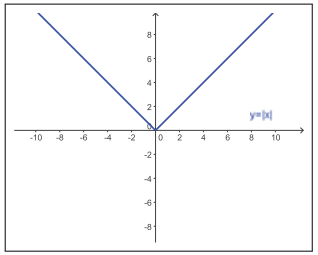


$y = l(x) = h(x) + 4 = 4 - |x-2|$

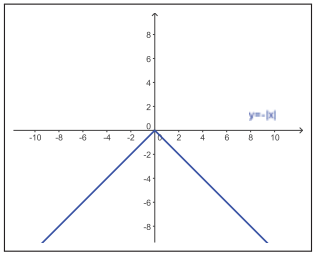


Exemplo: esboce o gráfico de $y = 4 - |x - 2|$

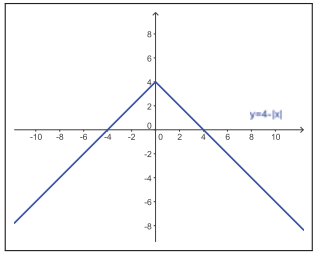
$y = f(x) = |x|$



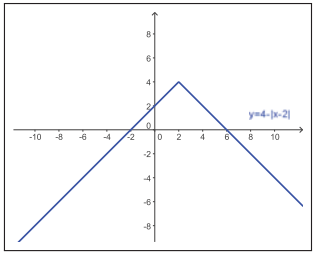
$y = g(x) = -f(x) = -|x|$



$y = h(x) = g(x) + 4 = 4 - |x|$



$y = l(x) = h(x-2) = 4 - |x-2|$



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 4

Versão 0.9

Novas funções a partir de antigas: operações com funções

Operações com funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ e $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ duas funções reais. Definimos as funções soma $f+g$, diferença $f-g$, produto $f\cdot g$ e quociente f/g da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcll}
(f+g)(x) & = & f(x)+g(x), & \text{com } D_{f+g} = D_f \cap D_g \\
(f-g)(x) & = & f(x)-g(x), & \text{com } D_{f-g} = D_f \cap D_g \\
(f\cdot g)(x) & = & f(x)\cdot g(x), & \text{com } D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g \\
(f/g)(x) & = & f(x)/g(x), & \text{com } D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}.
\end{array}$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1+\sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x-3.$$
$$D_f = [2,+\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 1+\sqrt{x-2}+x-3 = x-2+\sqrt{x-2},$$
$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [2,+\infty).$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1+\sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x-3.$$
$$D_f = [2,+\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 1+\sqrt{x-2}-(x-3) = 4-x+\sqrt{x-2},$$
$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [2,+\infty).$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$
$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) \cdot (x-3),$$
$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$
$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x-3},$$
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = [2, +\infty) - \{3\}.$$

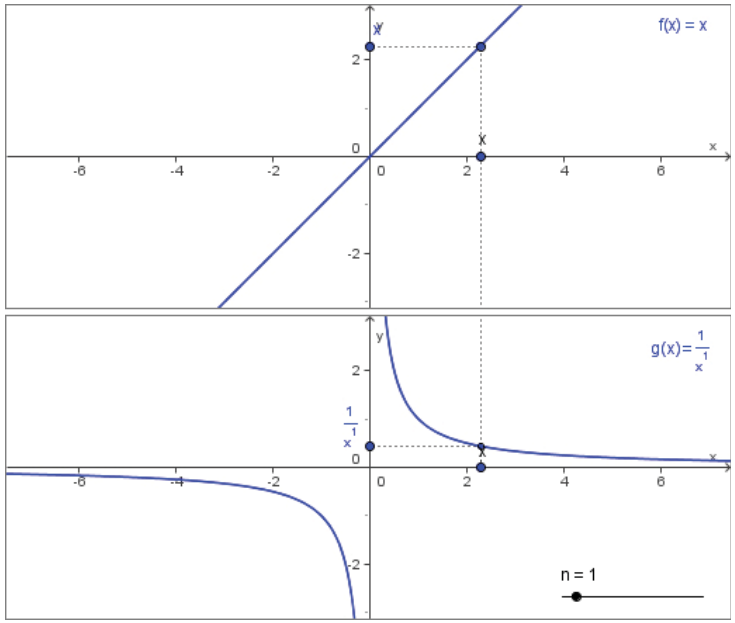
Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$
$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} = 1,$$
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Revisão: funções da forma x elevado a menos n

Revisão: funções da forma x elevado a menos n



Revisão: funções da forma x elevado a menos n

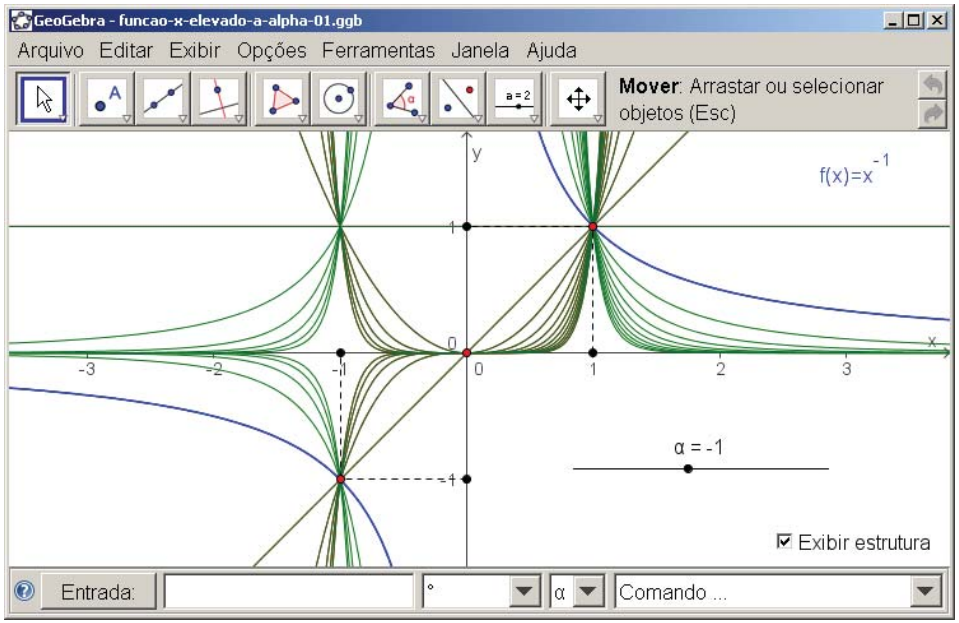
$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$$

(1) f é uma função par se n é um número par e f é uma função ímpar se n é um número ímpar.

(2) Se $0 < x < 1$, então $\dfrac{1}{x^n} < \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

(3) Se $1 < x$, então $\dfrac{1}{x^{n+1}} < \dfrac{1}{x^n}$.

Revisão: funções da forma x elevado a α



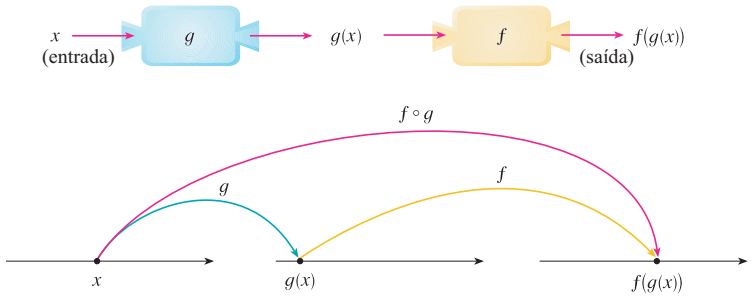
Novas funções a partir de antigas: composição de funções

Composição de funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$.
A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$



Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = x + 3, \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Moral: (em geral) $f \circ g \neq g \circ f$.

A operação de composição de funções não é comutativa!

Identificando composições

$$h(x) = (x^2 + 1)^{10} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = x^{10} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

Identificando composições

$$h(x) = \text{tg}(x^5) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \text{tg}(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^5.$$

Identificando composições

$$h(x) = \sqrt{4 - 3\,x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 4 - 3\,x.$$

Identificando composições

$$h(x) = 8 + \sqrt{x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 8 + x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

Identificando composições

$$h(x) = 1/(x+1) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 1/x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + 1.$$

Funções inversíveis

Funções inversíveis

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é inversível se existe função $g\colon C \to D$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in D$$

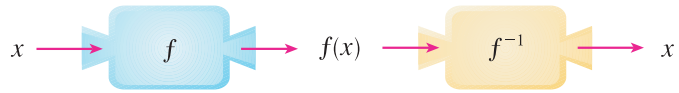
e

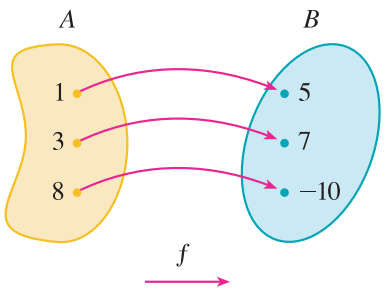
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in C.$$

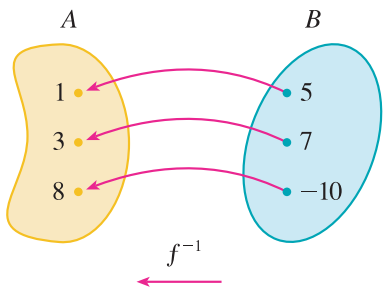
Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escreveremos:

$$g = f^{-1}.$$

Exemplo







Exemplo

A função

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rccl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x,\quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((x-1)/2)=2((x-1)/2)+1=x,\ \ \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=(x-1)/2$.

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x)=(x-1)/2$, enquanto que $(f(x))^{-1}=(2\,x+1)^{-1}=1/(2\,x+1)$.

Observações

Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil seja com a definição, seja com a proposição anterior.

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para estudar se uma função é inversível (localmente).

O gráfico da função inversa

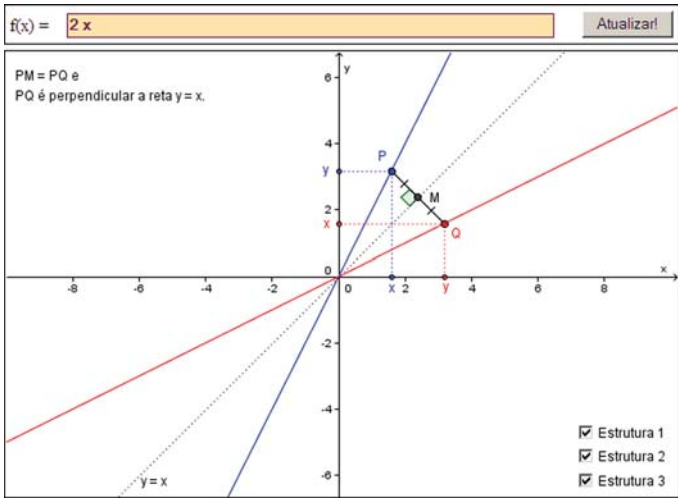
Seja f uma função real inversível.

Se $f(1)=2$, então $f^{-1}(2)=1$.
Assim, o ponto $(1,2)$ pertence ao gráfico de f e $(2,1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2)=3$, então $f^{-1}(3)=2$.
Assim, o ponto $(2,3)$ pertence ao gráfico de f e $(3,2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x)=y$, então $f^{-1}(y)=x$.
Assim, o ponto (x,y) pertence ao gráfico de f e (y,x) pertence ao gráfico de f^{-1}.

O gráfico da função inversa



(Ir para o GeoGebra)

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com relação a reta $y = x$.

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
o gráfico da inversa f^{-1} é obtido
fazendo-se uma reflexão do gráfico de f com relação a reta $y = x$.

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

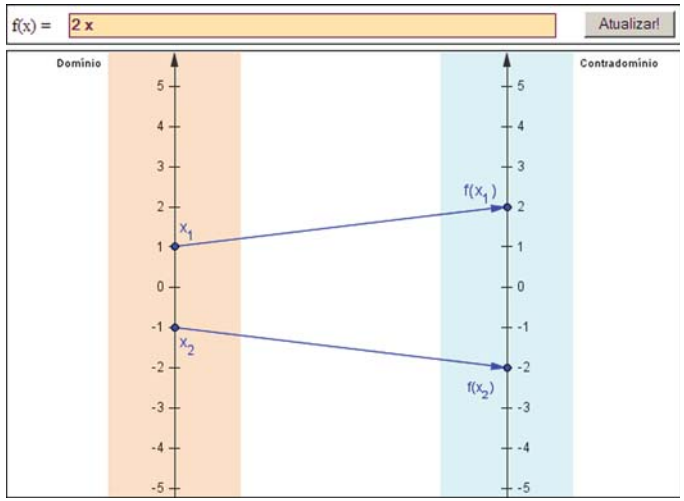
Funções injetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é injetiva se elementos diferentes de D são transformados por f em elementos diferentes em C, isto é, se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

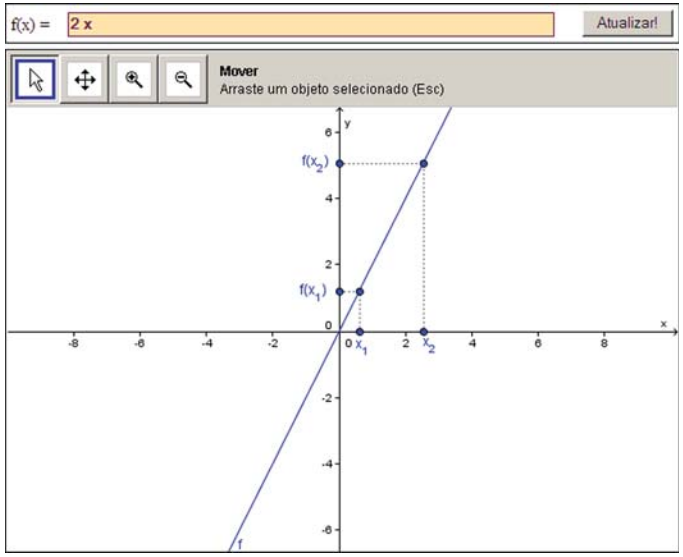
Forma equivalente (usando a contrapositiva): $f\colon D \to C$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se $x_1 = x_2$.

Funções injetivas



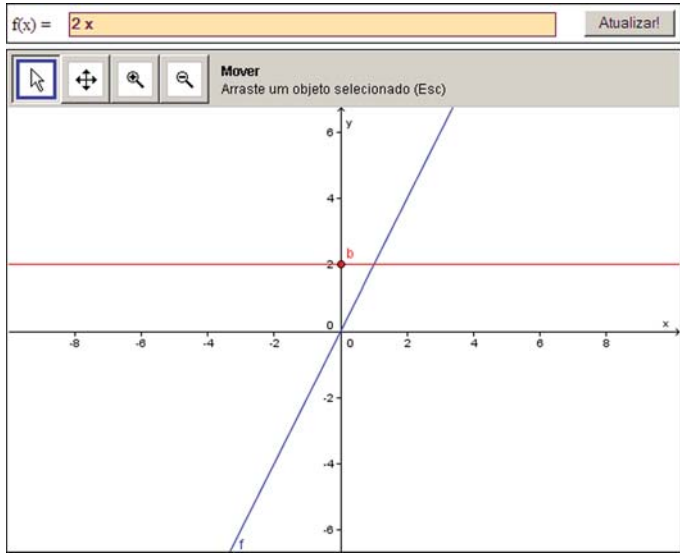
(Ir para o GeoGebra)

Funções injetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções injetivas



(Ir para o GeoGebra)

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; 2\,x_1 + 1 = 2\,x_2 + 1 \;\Rightarrow\; 2\,x_1 = 2\,x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2. \qquad \blacksquare$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que obrigatoriamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Em particular, $x_1 = x_2$. ■

Funções sobrejetivas

Definição

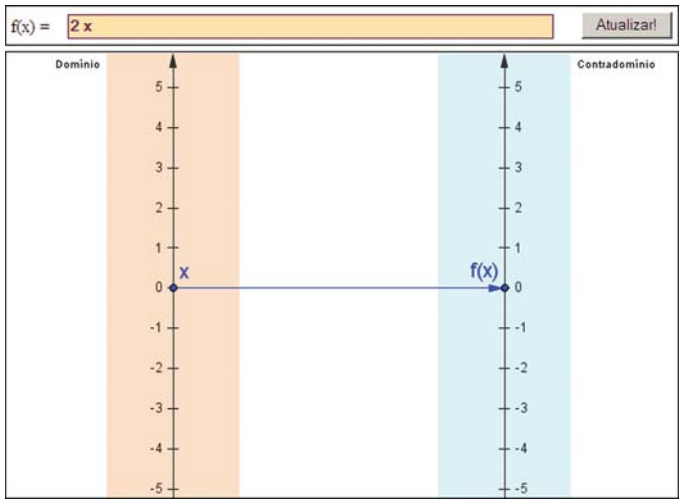
Dizemos que $f\colon D \to C$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se para todo $y \in C$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Funções sobrejetivas

Definição

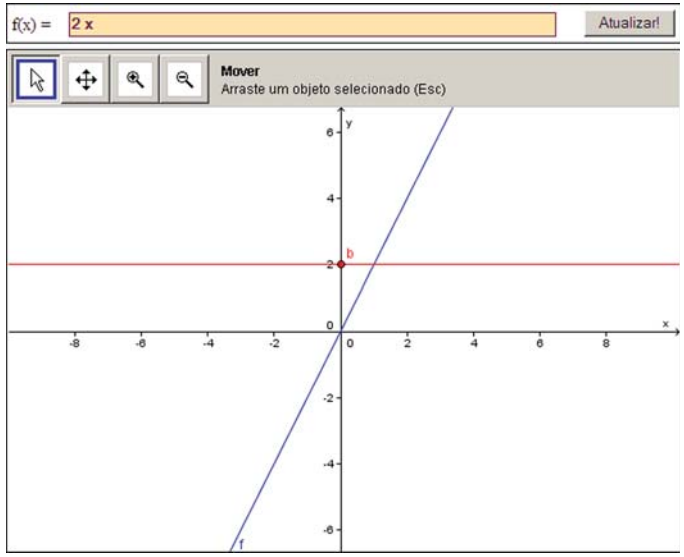
Dizemos que $f\colon D \to C$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se para todo $y \in C$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Funções sobrejetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções sobrejetivas



(Ir para o GeoGebra)

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x = y - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, $x = (y-1)/2 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = y$. Isto mostra que f é sobrejetiva. ■

Atenção!

Mostrar que a função $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $y = f(x) = x^2$ é sobrejetiva

é bem mais complicado!

Para fazer isto, precisaríamos do conceito de continuidade,
que será visto em Cálculo I -A-.

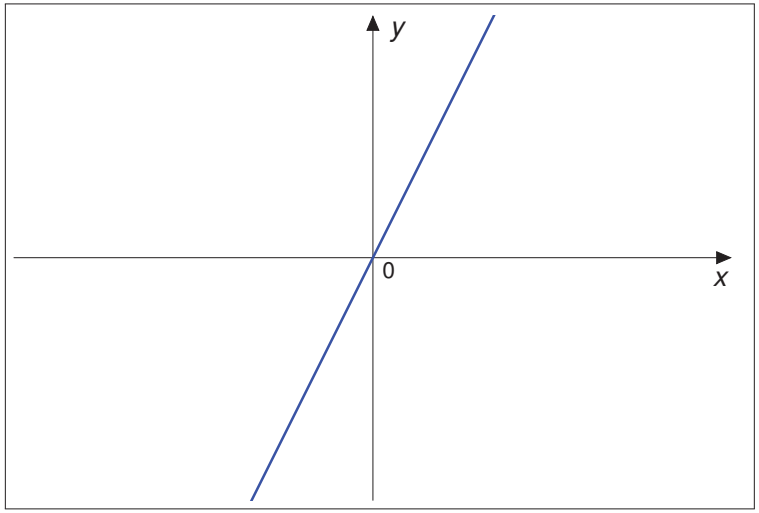
Funções bijetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é bijetiva se ela é injetiva e sobrejetiva.

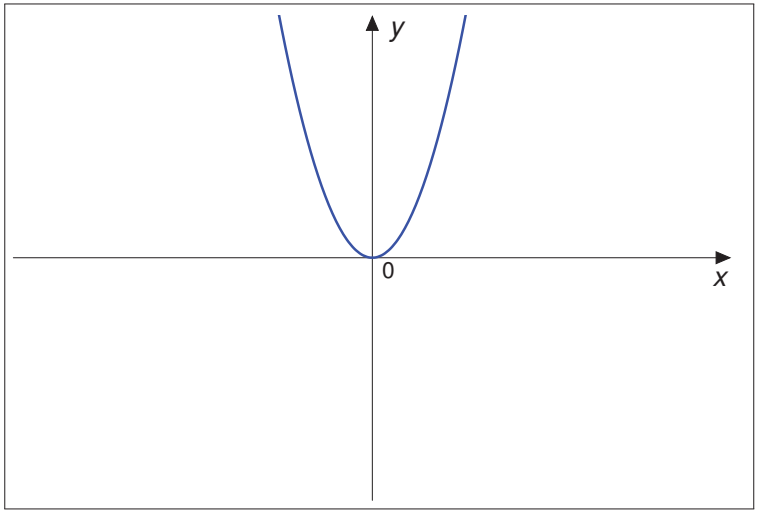
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 2x+1 \end{array}$$ é bijetiva.



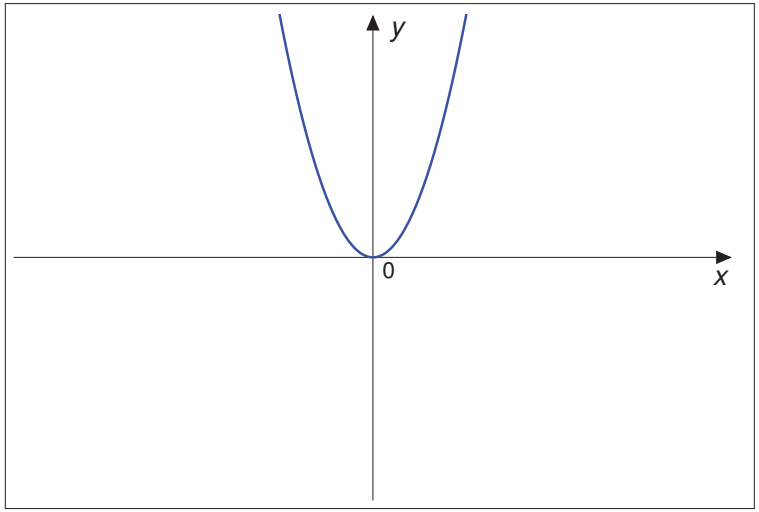
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva e nem sobrejetiva.



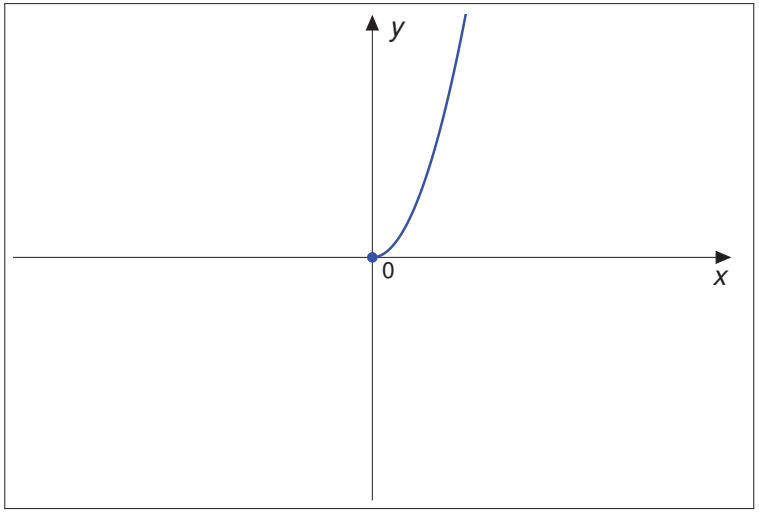
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & [0,+\infty) \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva (mas é sobrejetiva).



Funções bijetivas

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ é bijetiva.



Proposição

Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

A demonstração pode ser encontrada no livro A Matemática do Ensino Médio de Lima et al!

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 5

Versão 0.9

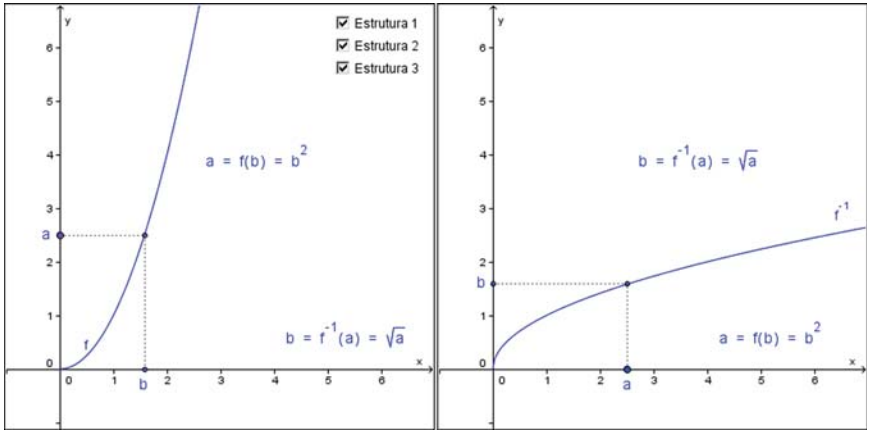
A função raiz quadrada

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.
- A função inversa f^{-1} de f é denominada função raiz quadrada. Usaremos a notação
$$\sqrt{x}$$
para representar
$$f^{-1}(x).$$
- Note então que, se $a \geq 0$, então $\sqrt{a}$ é o único número real ≥ 0 que, elevado ao quadrado, dá o número real a.

A função raiz quadrada



(Ir para o GeoGebra)

Propriedades

- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.
- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ e $\forall a, b \leq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.
- $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\forall a \leq 0, \forall b < 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.
- A função raiz quadrada é crescente: $\forall a, b \geq 0, \ a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Mais funções trigonométricas: secante, cossecante e cotangente

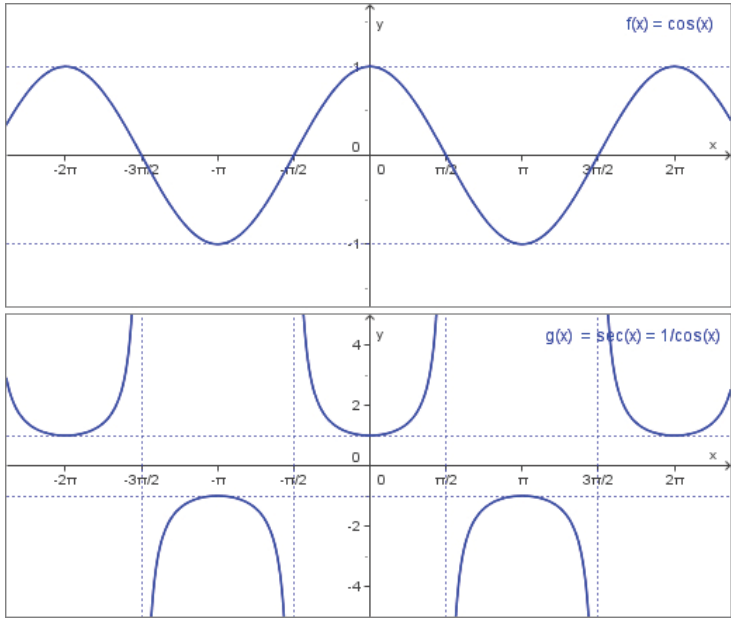
A função secante

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Qual é o domínio natural da função secante?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

A função secante



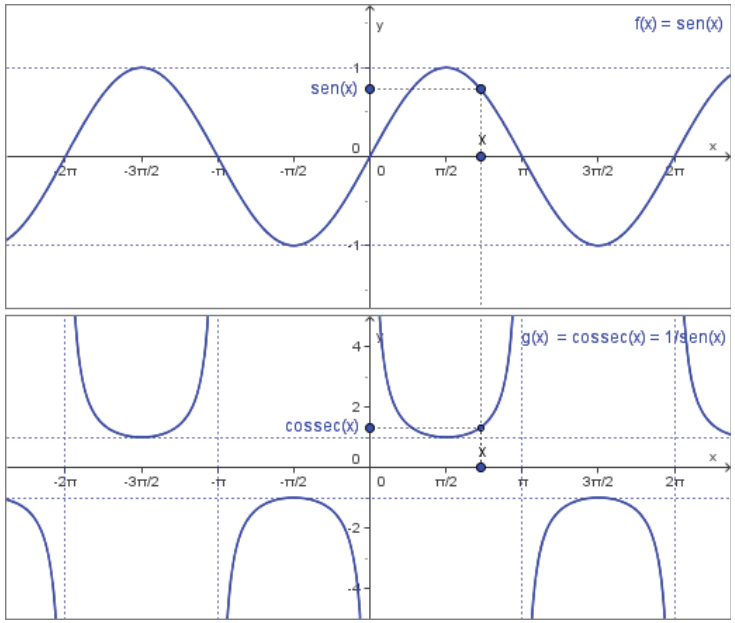
A função cossecante

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cossecante?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

A função cossecante



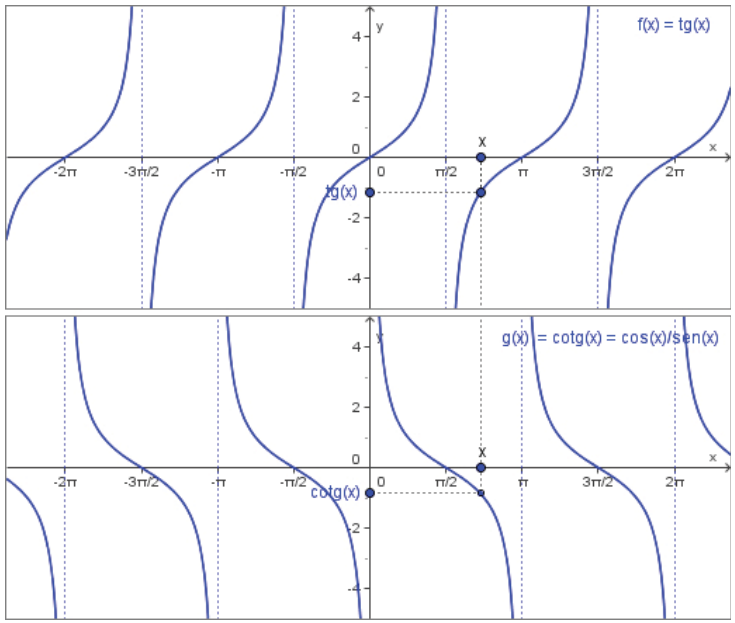
A função cotangente

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cotangente?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

A função cotangente

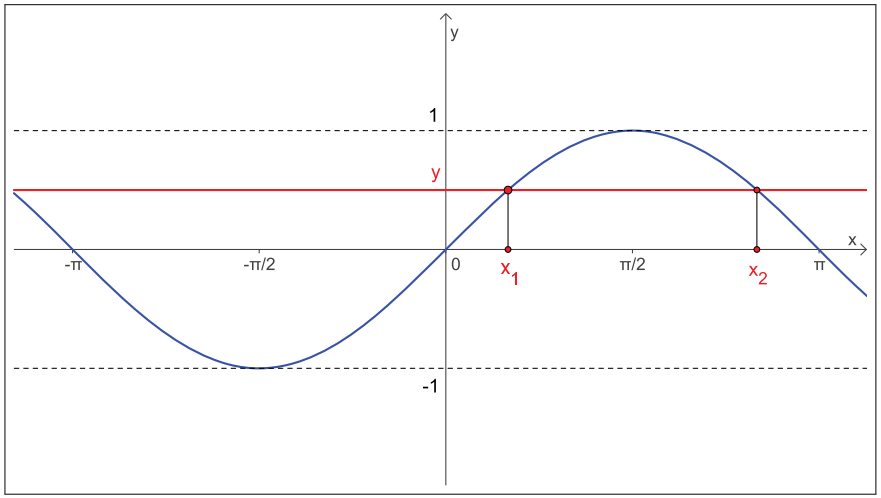


Funções trigonométricas inversas: arco seno, arco cosseno e arco tangente

A função arco seno

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

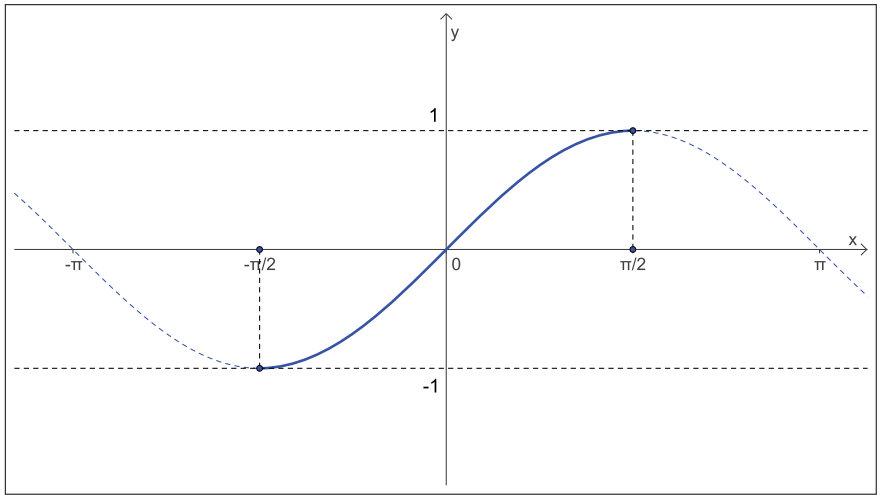
não é inversível, pois não é injetiva.



A função arco seno

$$\begin{array}{rcl} f\colon [-\pi/2, +\pi/2] & \to & [-1, +1] \\ x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

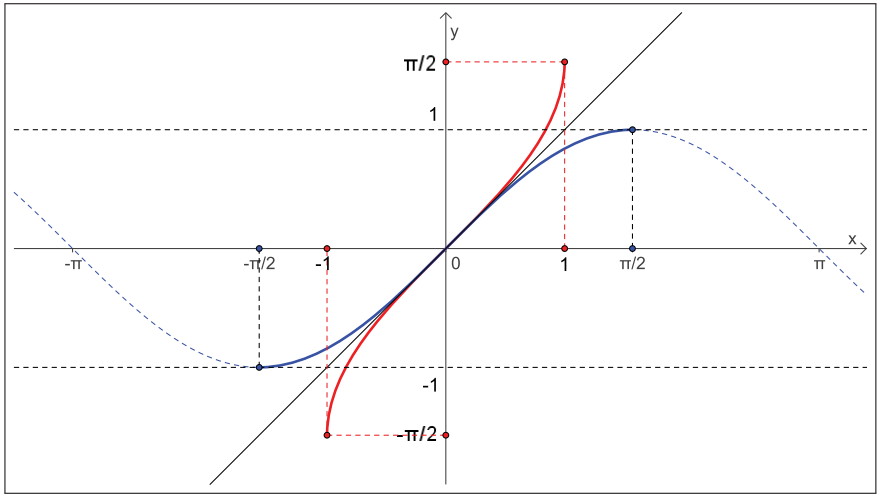
é inversível, pois é bijetiva.



A função arco seno

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon [-1, +1] & \to & [-\pi/2, +\pi/2] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x) \end{array}$$

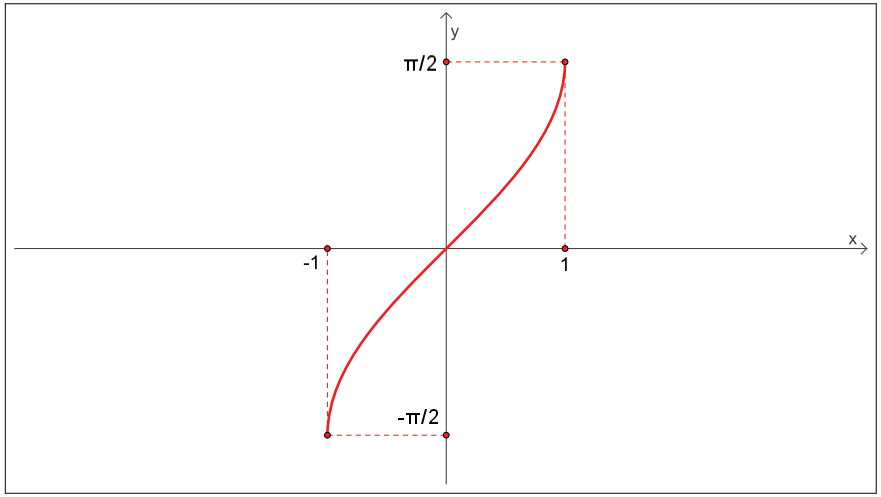
é sua função inversa.



Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon [-1, +1] & \to & [-\pi/2, +\pi/2] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x) \end{array}$$

é sua função inversa.



A função arco seno

Mostre que $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

Demonstração.

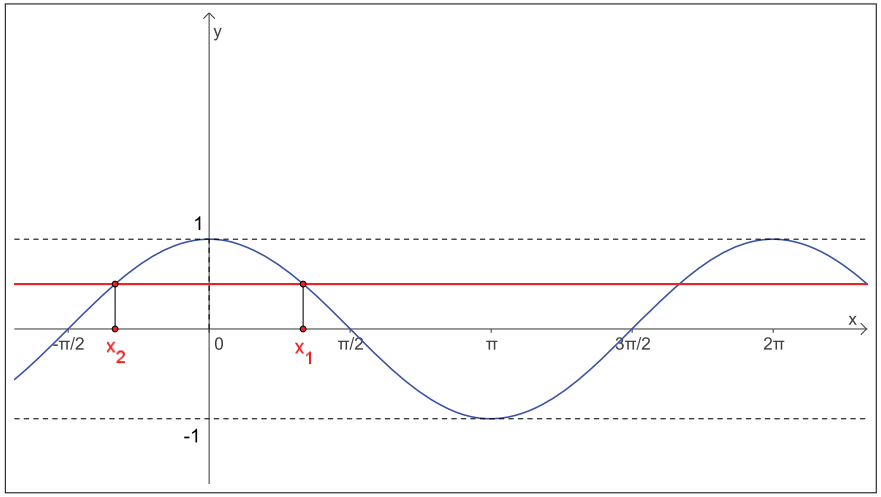
$$
\begin{aligned}
[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\operatorname{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\operatorname{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\operatorname{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$. ■

A função arco cosseno

$$
\begin{array}{rcl}
f: \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x)
\end{array}
$$

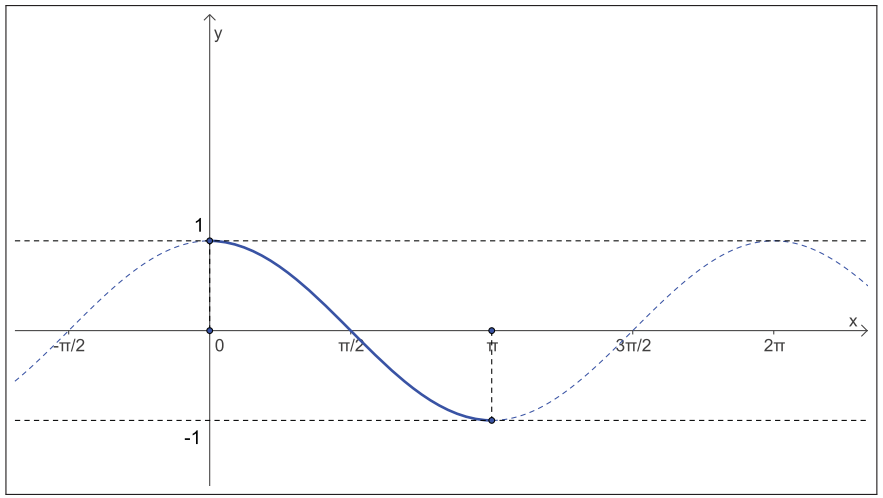
não é inversível, pois não é injetiva.



A função arco cosseno

$$
\begin{array}{rcl}
f: \ [0,\pi] & \to & [-1,+1] \\
x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x)
\end{array}
$$

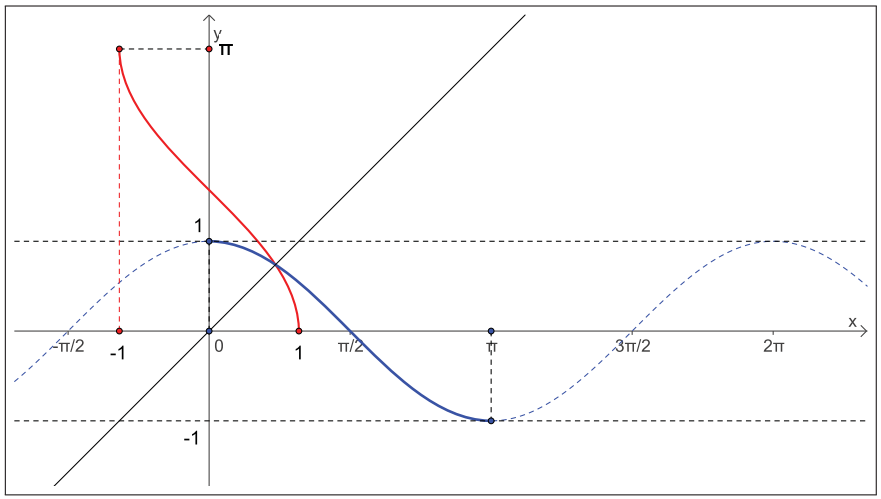
é inversível, pois é bijetiva.



A função arco cosseno

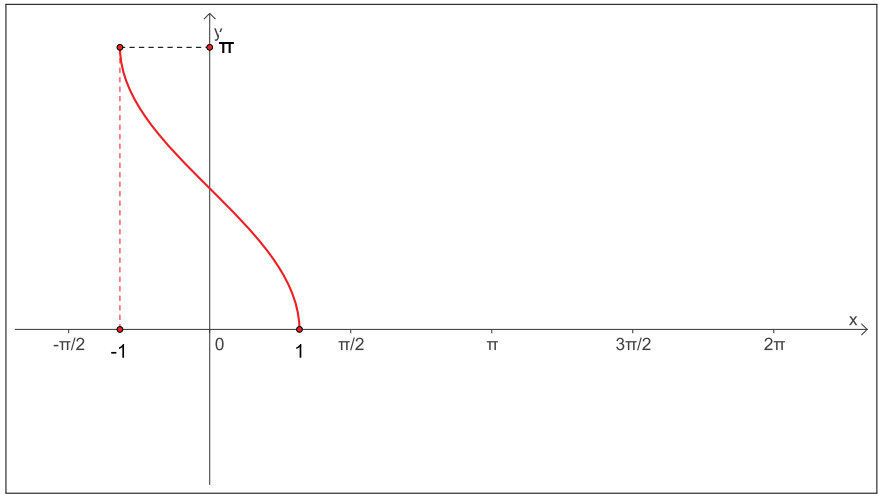
$$
\begin{array}{rcl}
f^{-1}: \ [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\
x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \arccos(x)
\end{array}
$$

é sua função inversa.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco cosseno

Mostre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

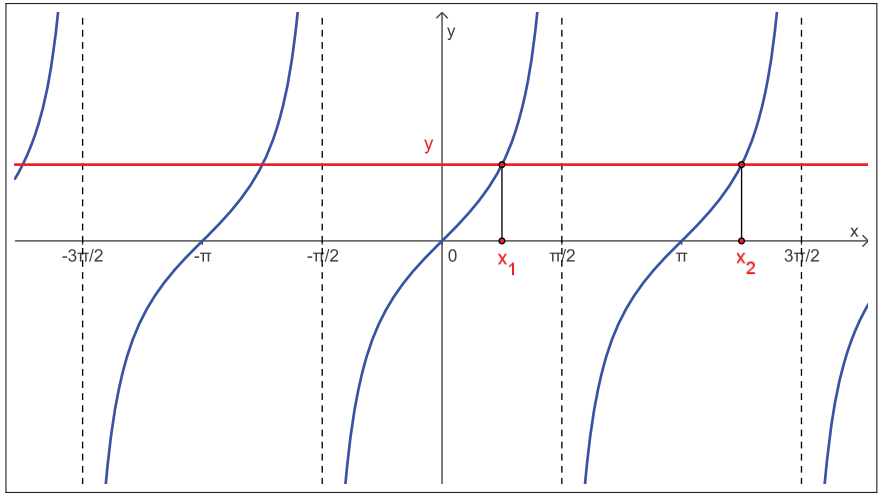
Demonstração.

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\arccos(x) \in (0,\pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$. ■

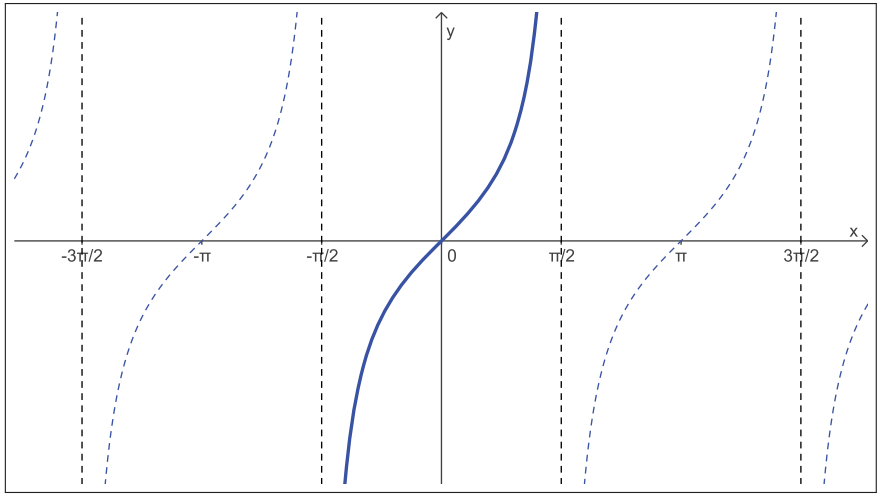
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) \end{array}$$ não é inversível.



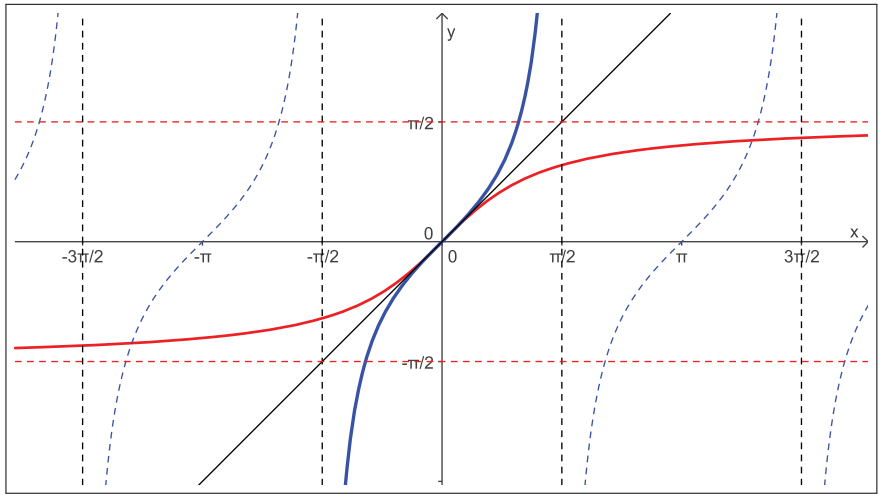
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f: & (-\pi/2,+\pi/2) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



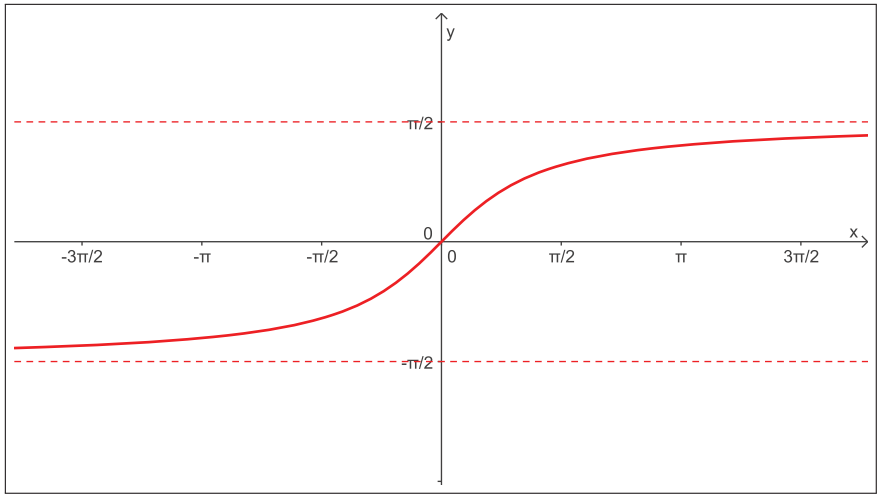
A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco tangente

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco tangente

Mostre que $\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{[\cos(\operatorname{arctg}(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}$$
$$\Downarrow$$
$$1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$
$$\Downarrow$$
$$1 + x^2 = \sec^2(\operatorname{arctg}(x))$$
$$\Downarrow$$
$$\sec^2(\operatorname{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

■

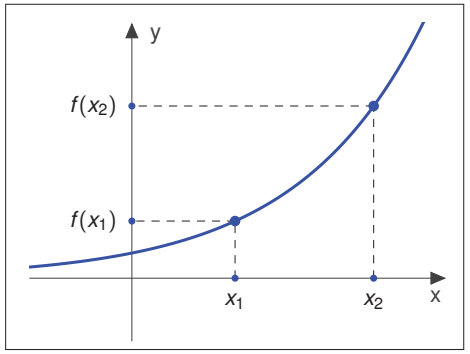
Funções monótonas

Função crescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

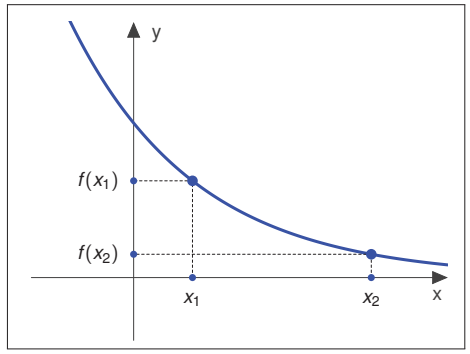


Funções decrescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

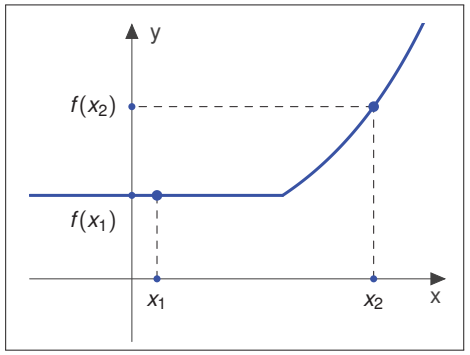


Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

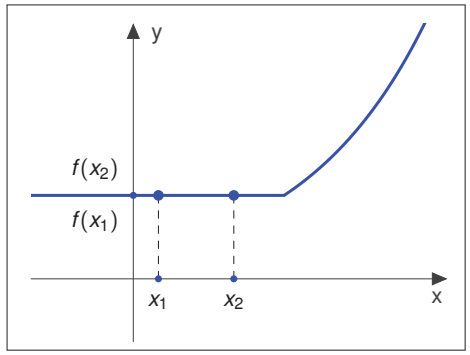


Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

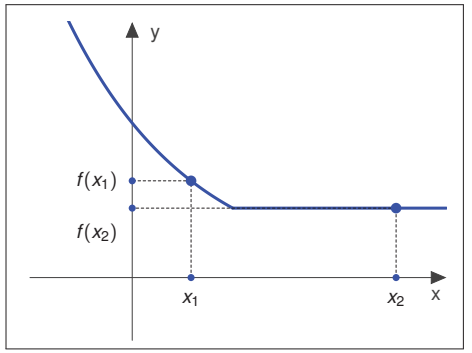


Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

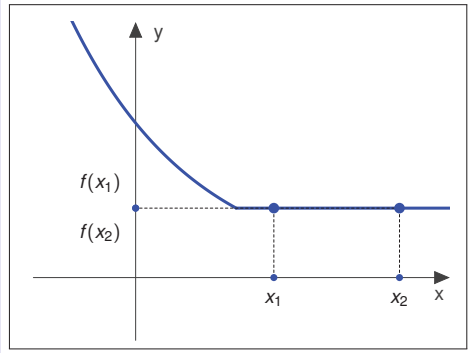


Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

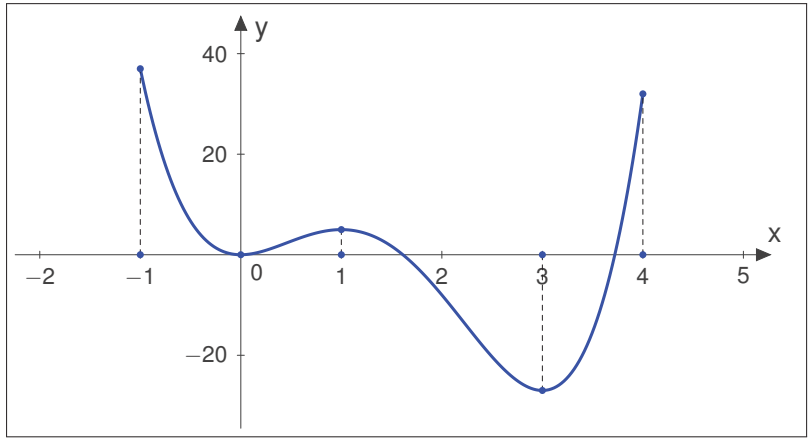


Observações

- Uma função monótona em um conjunto S é uma função que é crescente, decrescente, monótona não-decrescente ou monótona não-crescente neste conjunto.
- Note que toda função crescente em um conjunto S também é monótona não-decrescente neste conjunto e que toda função decrescente em um conjunto S também é monótona não-crescente neste conjunto.
- Uma função é estritamente monótona em um conjunto S se ou ela é crescente ou ela é decrescente neste conjunto.

Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$. Contudo, ela é monótona em $[-1, 0]$, em $[0, 1]$, em $[1, 3]$ e em $[3, 4]$.



Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2,$$

isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos então que $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Logo, f é uma função crescente em S. ■

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

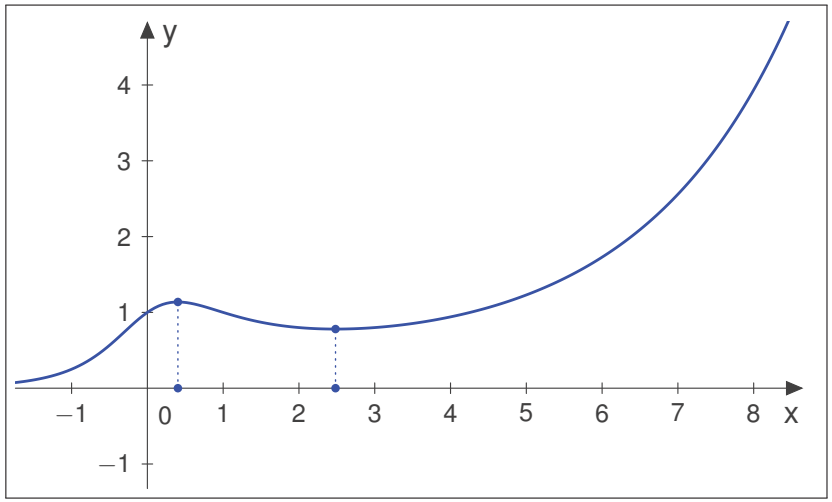
f é crescente nos intervalos

$$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}\right] = (-\infty, 0.402806113\ldots] \text{ e } \left[\frac{1+\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}, +\infty\right) = [2.482583968\ldots, +\infty).$$

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para se resolver questões deste tipo!

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$



Máximos e mínimos de funções reais

Extremos globais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Extremos locais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

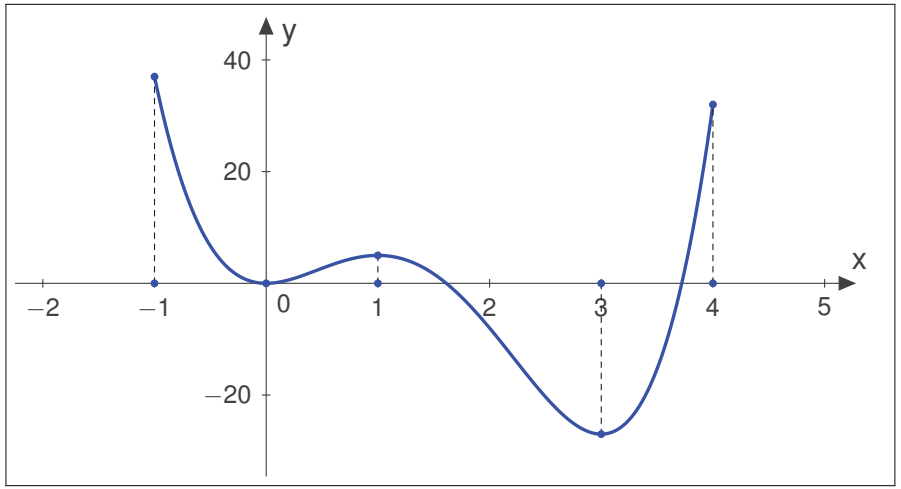
(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

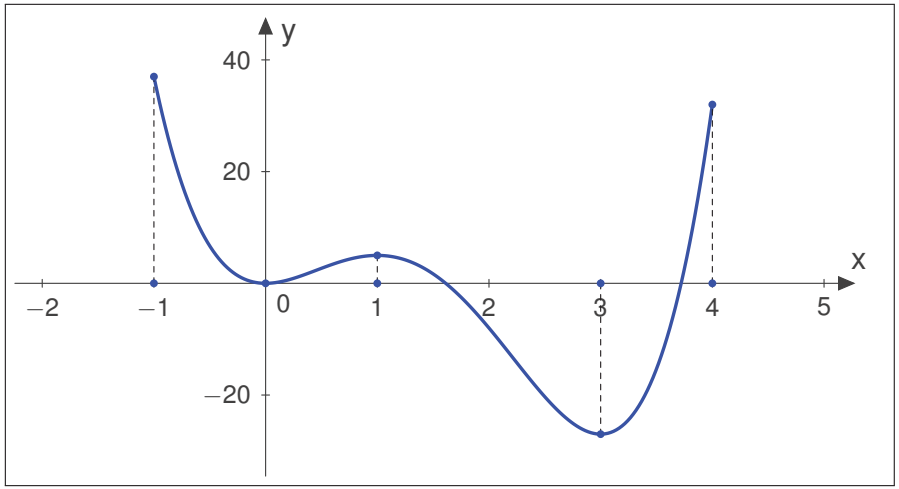
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de máximo global de f em A é $p = -1$.



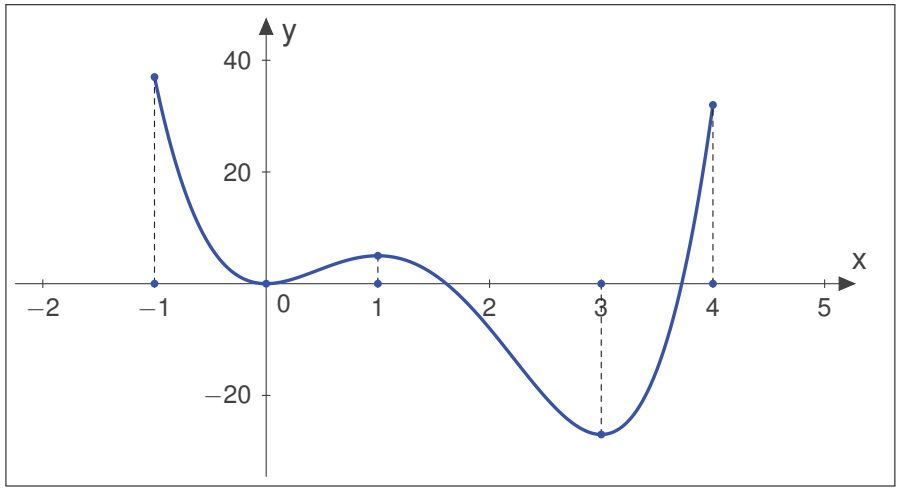
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo global de f em A é $p = 3$.



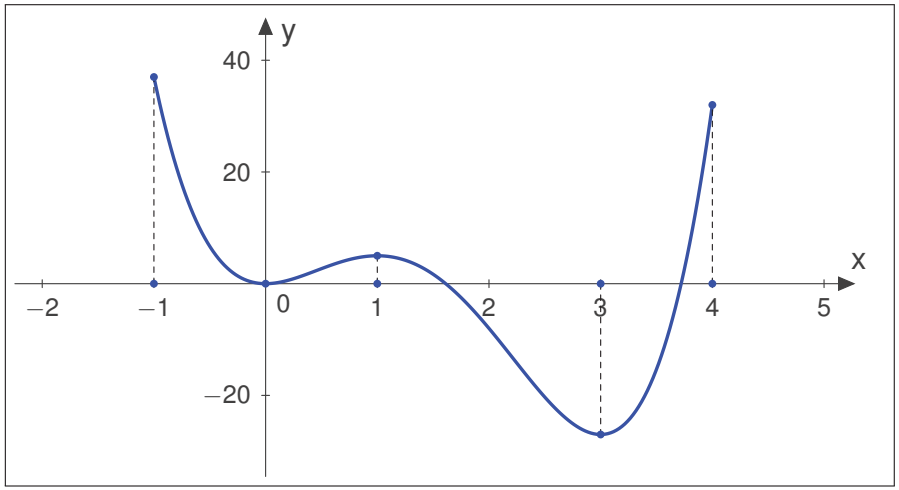
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$



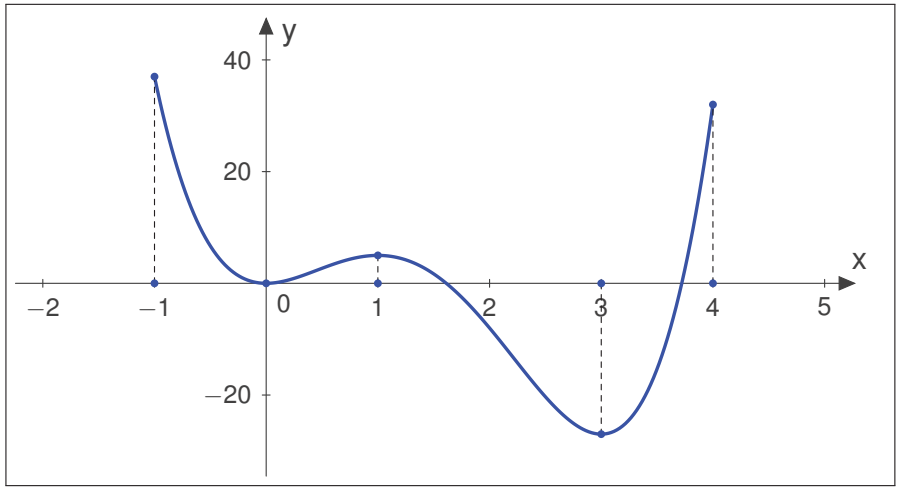
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$ e $q = 4$.



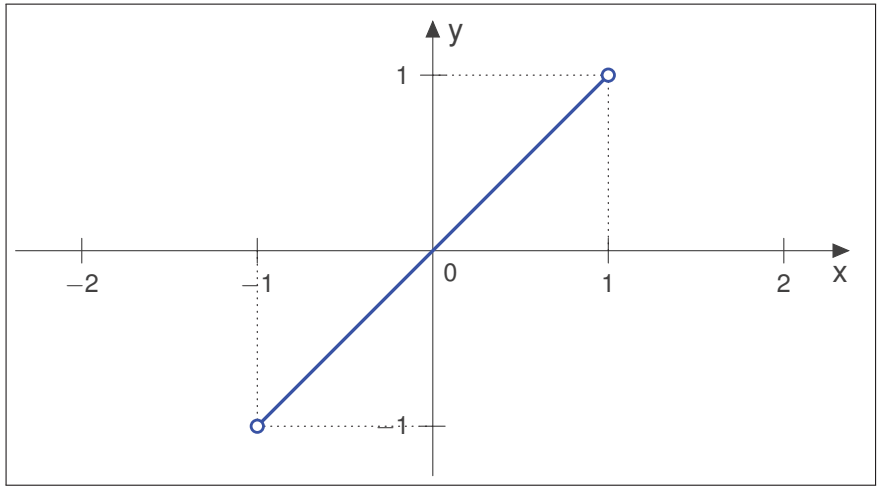
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo local de f em A que não é global é $p = 0$.



Exemplo: $y = f(x) = x$, $A = (-1, +1)$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

Quais são os extremos da função f abaixo?

$$\begin{array}{rcl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

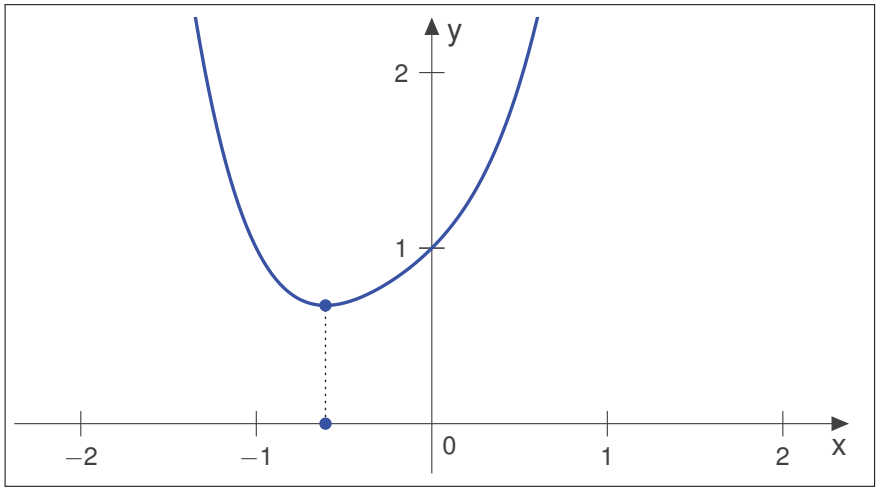
$$x = \frac{15 - \sqrt[3]{(135 + 60\sqrt{6})^2} - 3\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}}{12\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}} = -0.605829\ldots$$ é ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}$.

A função f não possui outros extremos globais em $\mathbb{R}$.

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para se resolver questões deste tipo!

Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

$$\begin{array}{rcl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

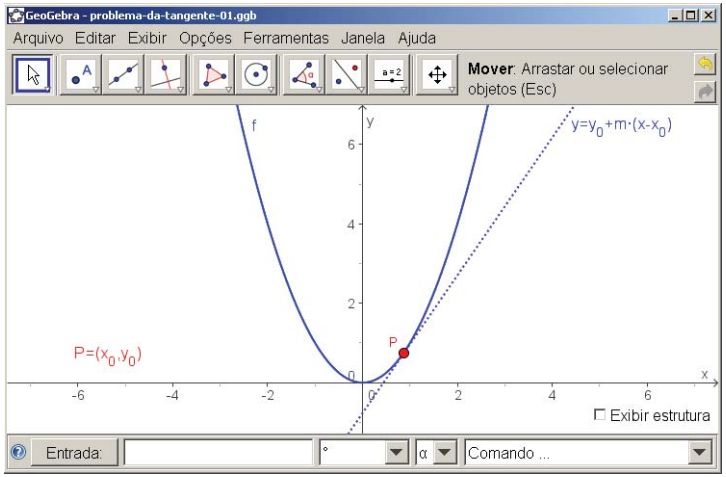
Parte 6

Versão 0.9

Limites

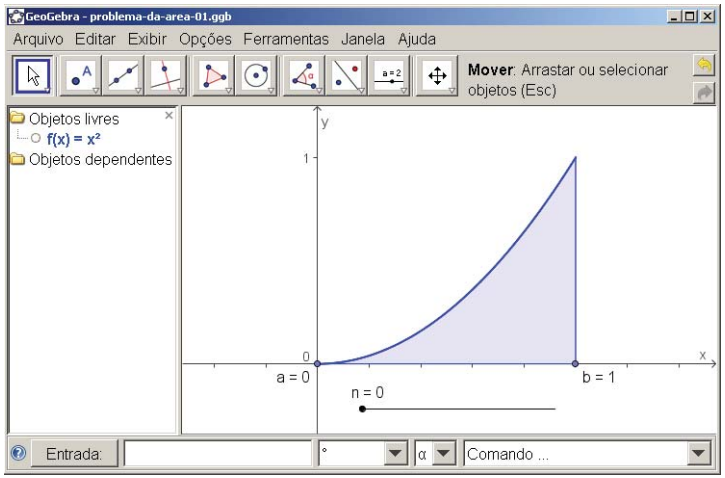
Motivação: o problema da tangente

Dada uma função f e um ponto P no seu gráfico, ache uma equação da reta que é tangente ao gráfico de f em P.



Motivação: o problema da área

Dada uma função f, ache a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ no eixo x.



Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

não está definida em $p = 1$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 1$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

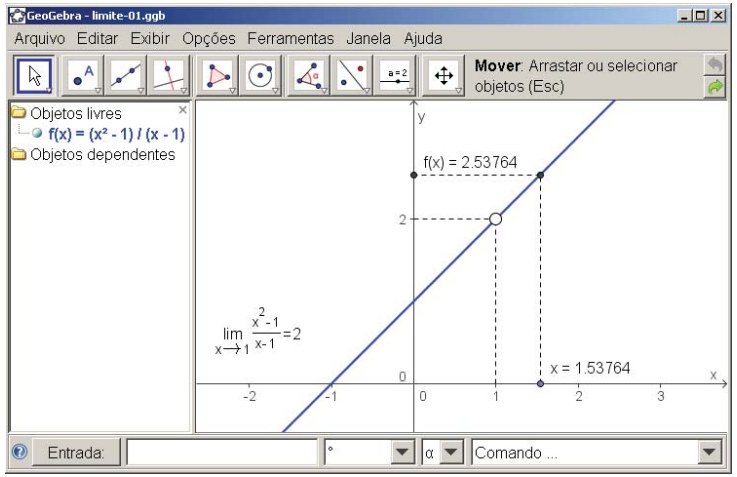
Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

O que está acontecendo geometricamente?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$



Limites (de um ponto de vista informal)

Definição

Se os valores de $q(x)$ podem ser tomados tão próximos quanto quisermos do número L, fazendo x suficientemente próximo de p (mas não igual a p), então escrevemos

$$\lim_{x \to p} q(x) = L,$$

o qual deve ser lido como

"o limite de $q(x)$ quando x tende a p é igual a L".

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

não está definida em $p = 0$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 0$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

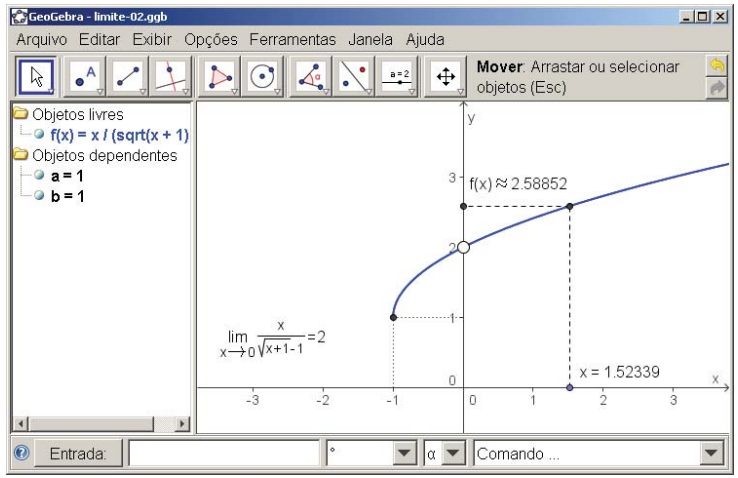
Exemplo

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \frac{x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \frac{x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}{x} \\ &= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = 2.$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = 2.$$



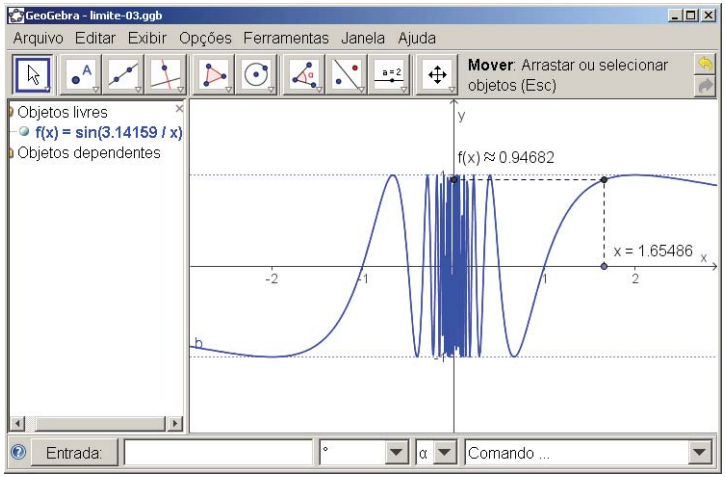
Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10\cdot\pi$	0
-0.0100	$-100\cdot\pi$	0
-0.0010	$-1000\cdot\pi$	0
-0.0001	$-10000\cdot\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000\cdot\pi$	0
0.0010	$1000\cdot\pi$	0
0.0100	$100\cdot\pi$	0
0.1000	$10\cdot\pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

Não existe $\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$!



Exercícios

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2(x-1/2)(x+3)}{2(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2x^2+5x-3 = 2(x-1/2)(x+3)$ e
$2x^2-5x+2 = 2(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

Exercício 2

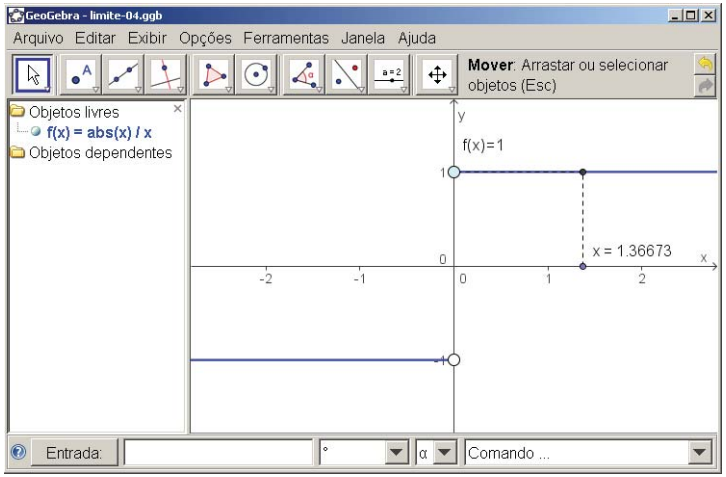
Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Limites laterais

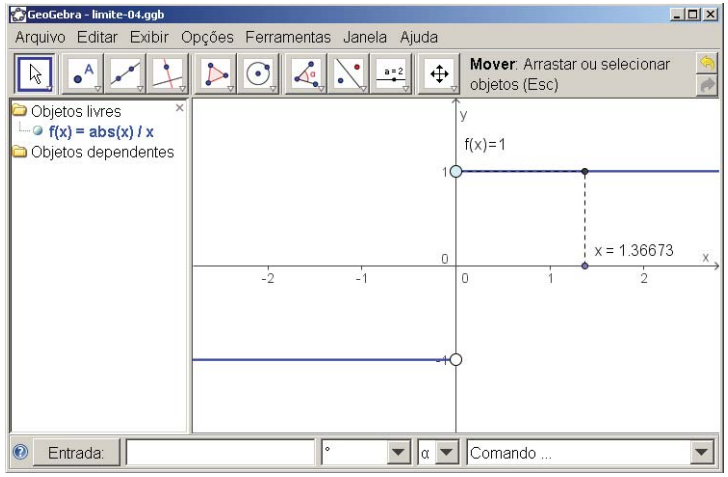
Limites laterais

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



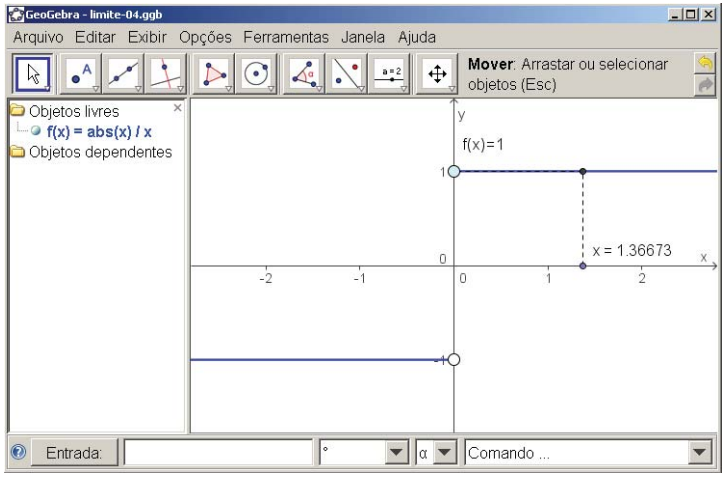
Limites laterais

Não existe $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \ldots$



Limites laterais

mas existem os limites laterais $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.



Limite lateral à direita (de um ponto de vista informal)

Definição

Se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de um número L, fazendo x suficientemente próximo de p (porém maior do que p), então escreveremos

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = L,$$

o qual deve ser lido

"o limite de $f(x)$ quando x tente a p pela direita é igual a L".

Limite lateral à esquerda (de um ponto de vista informal)

Definição

Se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de um número L, fazendo x suficientemente próximo de p (porém menor do que p), então escreveremos

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = L,$$

o qual deve ser lido

"o limite de $f(x)$ quando x tente a p pela esquerda é igual a L".

Relação entre limites laterais e bilaterais

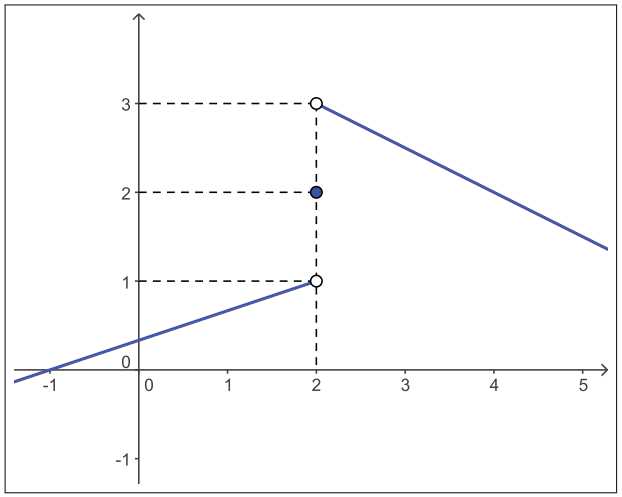
Proposição

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

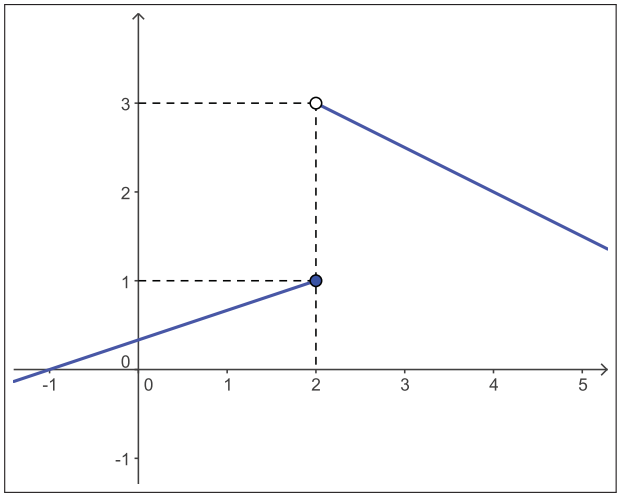
$$\lim_{x\to p^+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = L.$$

Exemplo



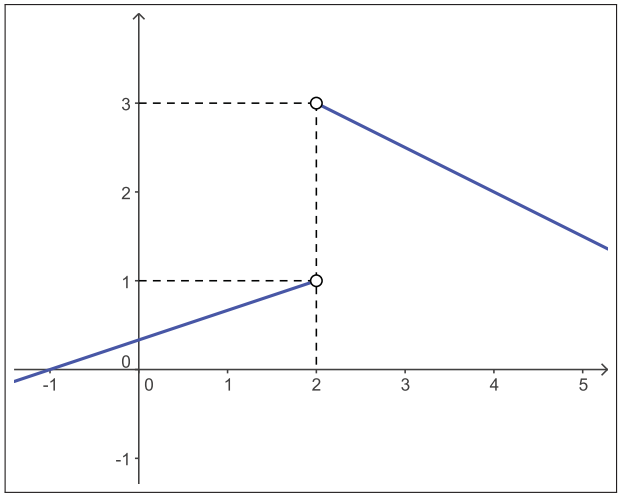
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



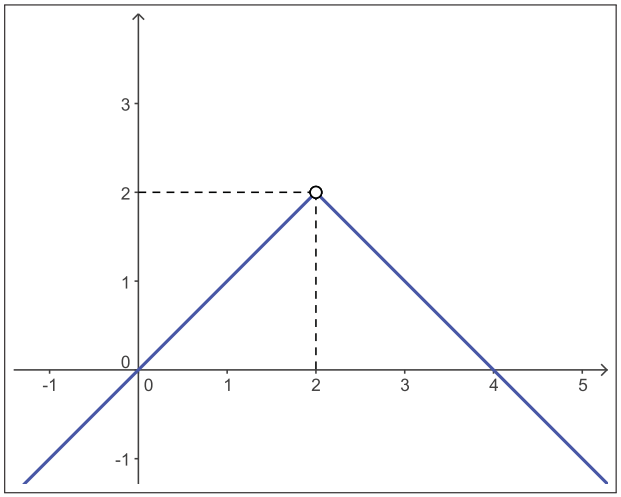
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



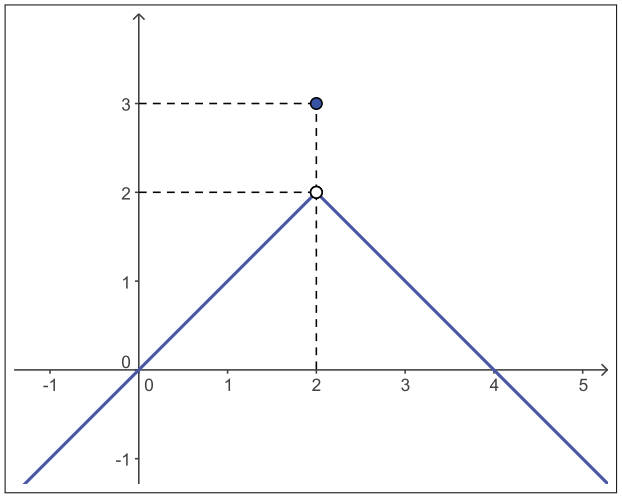
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



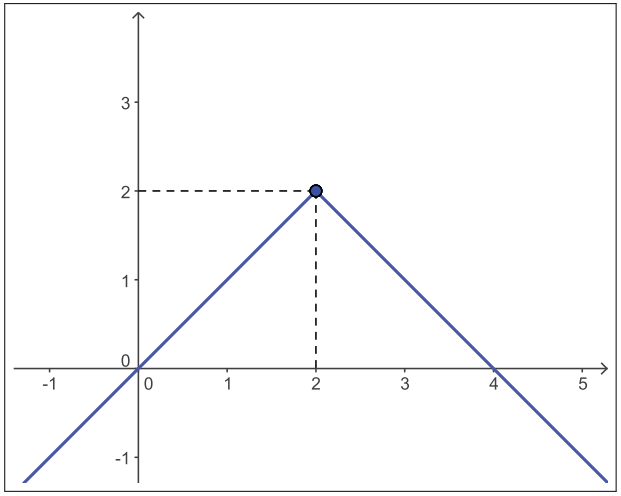
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



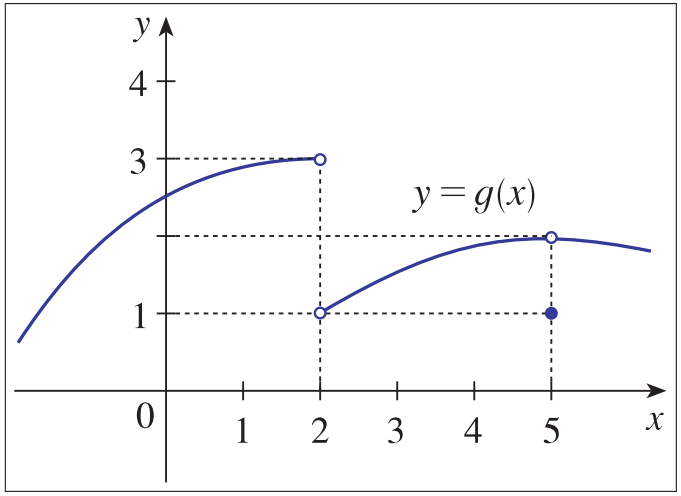
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



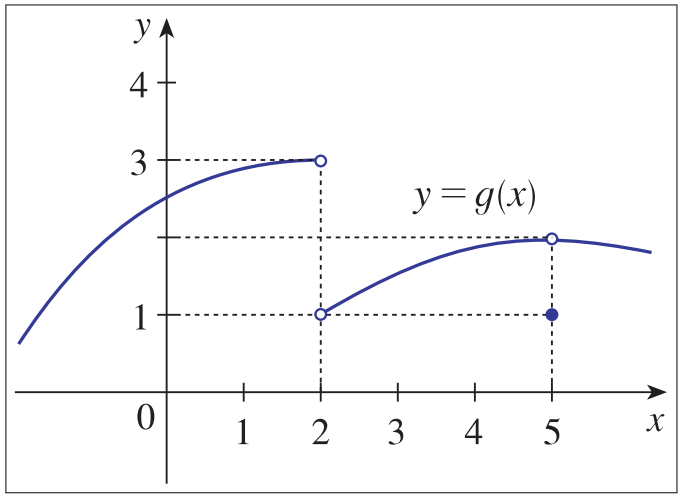
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} g(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 2.$$

Novo exercício!

Como $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, segue-se que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Assim, precisamos estudar os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = -3 \neq +3 = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|},$$

segue-se que

não existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x-1|}$!

Propriedades de limites

Propriedades de limites

Proposição

Suponha que existam os limites $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$. Então:

(1) O limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x).$$

(2) O limite de uma diferença é a diferença dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} g(x).$$

(3) O limite de um produto é o produto dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot \text{ g(x)}) = \lim_{x\to p} f(x)\cdot \lim_{x\to p} g(x).$$

Propriedades de limites

Proposição

(4) O limite de um quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero:

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}.$$

(5) O limite de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes o limite da função:

$$\lim_{x\to p}(c\cdot \text{ f(x)}) = c\cdot \lim_{x\to p} f(x).$$

Propriedades de limites

Corolário

Suponha que exista o limite $\lim_{x\to p} f(x)$. Então, para todo numero inteiro $n > 0$, vale que

$$\lim_{x\to p}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}[f(x)]^n &= \lim_{x\to p}(f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)) \qquad \text{(por (3))}\\ &= \left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\cdots\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\\ &= \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n.\end{aligned}$$

Propriedades de limites

Os resultados anteriores
continuam válidos para limites laterais!

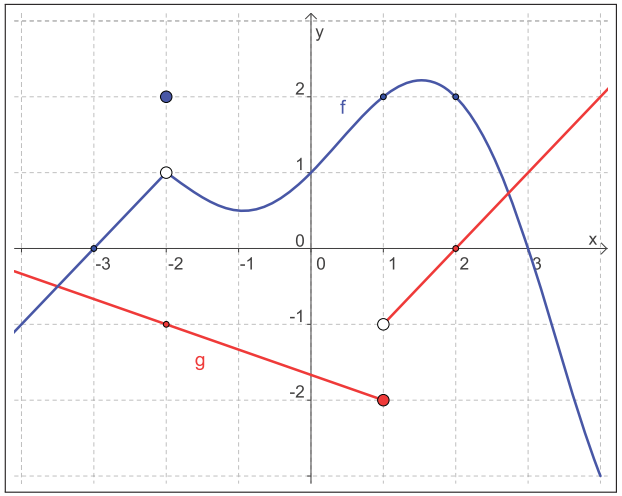
Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(2\,x^2-3\,x+4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2)-\lim_{x\to 5}(3\,x)+\lim_{x\to 5}4\\ &= 2\lim_{x\to 5}x^2-3\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}4\\ &= 2\,(5)^2-3\,(5)+4 \;=\; 39.\end{aligned}$$

Exemplo

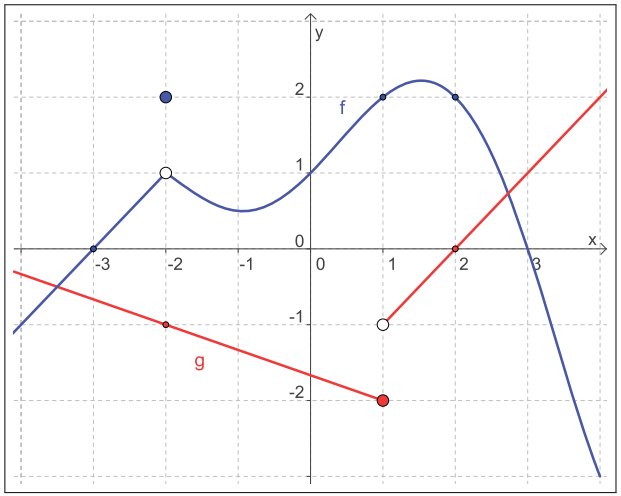
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2\,x^2-1}{5-3\,x} &= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2\,x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3\,x)}\\ &= \frac{\lim_{x\to -2}x^3+2\lim_{x\to -2}x^2-\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}5-3\lim_{x\to -2}x}\\ &= \frac{(-2)^3+2\,(-2)^2-1}{5-3\,(-2)} \;=\; -\frac{1}{11}.\end{aligned}$$

Exemplo



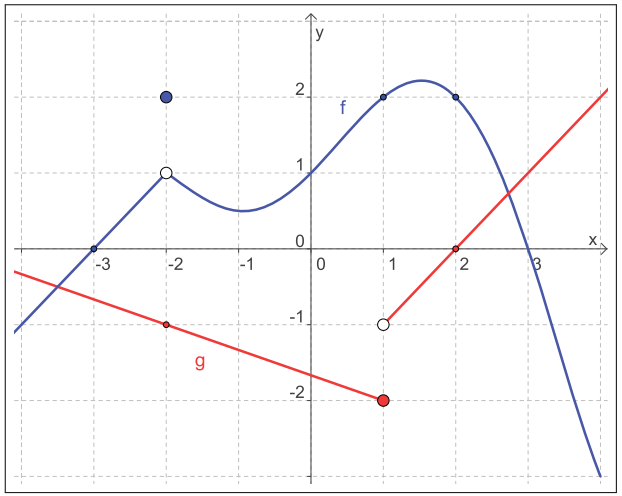
$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5\,g(x)] = \lim_{x\to -2}f(x)+5\lim_{x\to -2}g(x) = 1+5\,(-1) = -4.$$

Exemplo



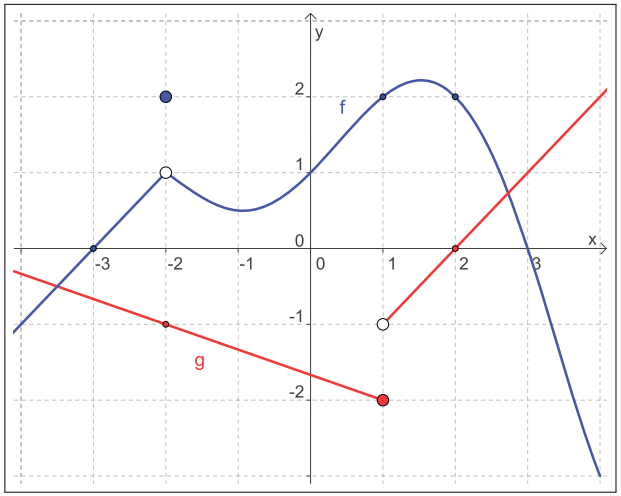
$\lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]$ não existe!

Exemplo



pois $\lim_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$.

Exemplo



$$\lim_{x\to 2}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to 2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

O teorema do confronto

O teorema do confronto

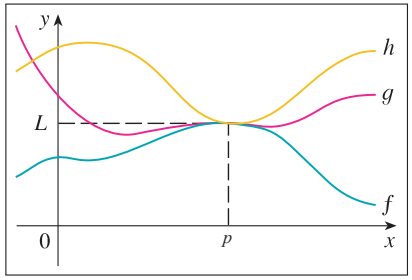
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x\to p} f(x) = L = \lim_{x\to p} h(x),$$

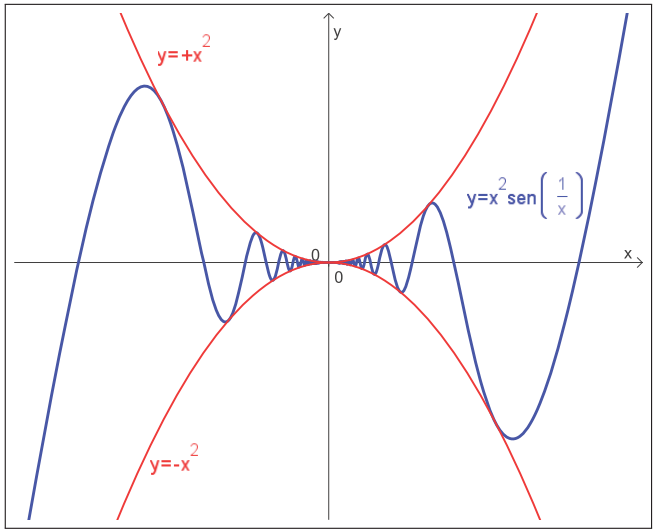
então

$$\lim_{x\to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

Exemplo



Exemplo

Mostre que $\lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to p} h(x) = M,$$

então

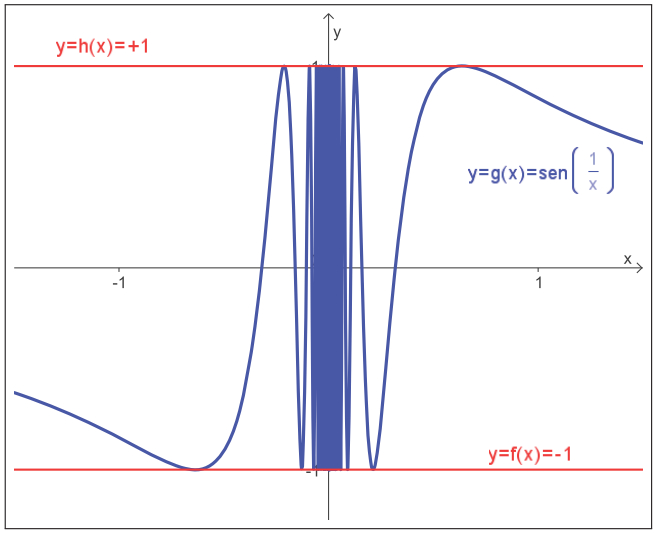
$$\lim_{x\to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0,\ \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x\to 0} h(x) = M = +1,$$

mas $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe!

Verdadeiro ou falso?



O teorema do anulamento

Funções limitadas

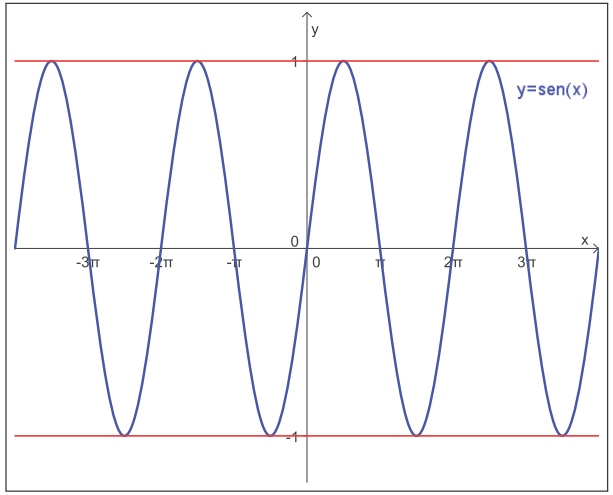
Definição

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é limitada em um conjunto D se existe uma constante $M > 0$ tal que, para todo $x \in D$,

$$-M \leq f(x) \leq +M.$$

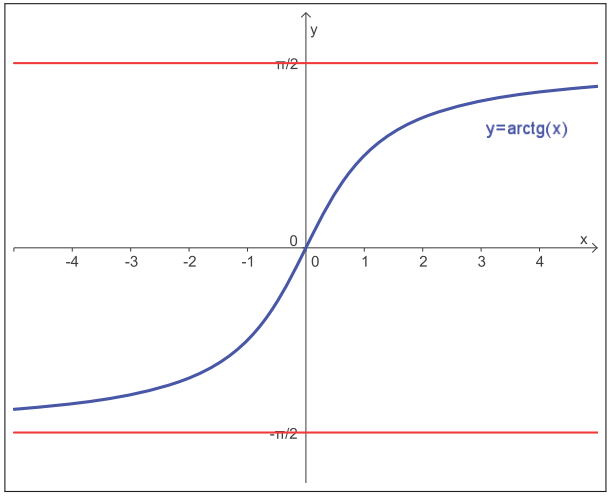
Exemplo

$y = \text{sen}(x)$ é limitada em $D = \mathbb{R}$.



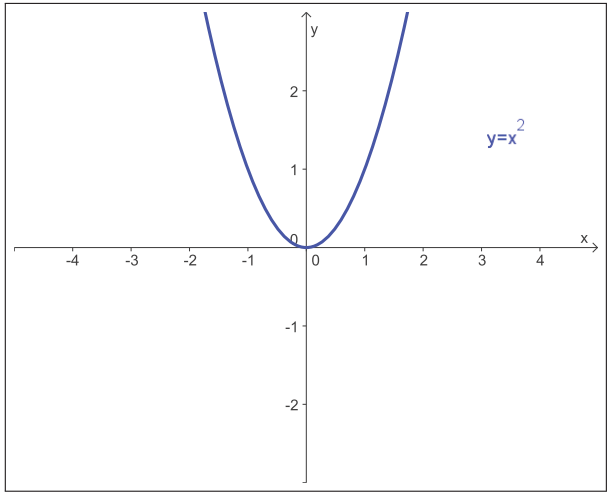
Exemplo

$y = \text{arctg}(x)$ é limitada em $D = \mathbb{R}$.



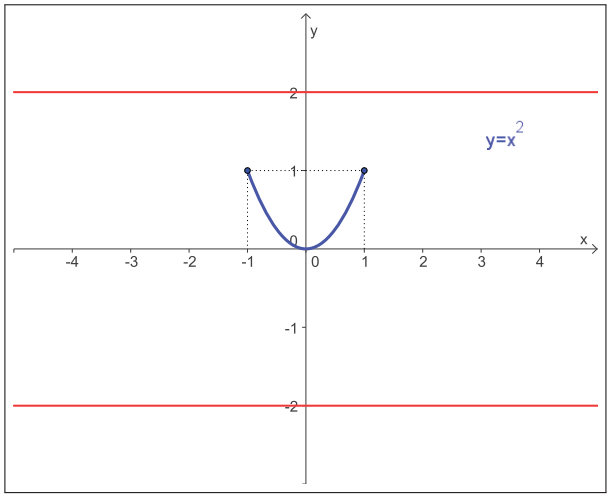
Exemplo

$y = x^2$ não é limitada em $D = \mathbb{R}$.



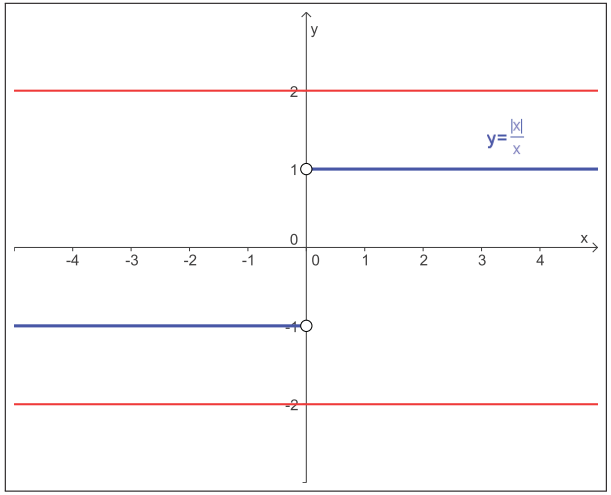
Exemplo

Mas $y = x^2$ é limitada em $D = [-1, +1]$.



Exemplo

$y = |x|/x$ é limitada em $D = \mathbb{R}$.



O teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)x^2\right] = \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Falso!

Tome $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Note que $\lim_{x\to} g(x) = 0$,

mas $\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot x = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0.$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Falso!

Tome $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$ e $g(x) = x$. Note que $\lim_{x\to} g(x) = 0$,

mas $\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2}\cdot x = \lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Falso!

Tome $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e $g(x) = 1$. Note que f é limitada e $\lim\limits_{x\to} g(x) = 1$,

mas $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\cdot 1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x\to p}|f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x) = 0$.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x\to p}|f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x\to p}|f(x)| = 0$ e, consequentemente, $\lim_{x\to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \le |f(x)| \le M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \le |f(x)|\cdot|g(x)| \le M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p}(|f(x)|\cdot|g(x)|) = \lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 7

Versão 0.9

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes

Calcule os limites

a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} =$

$ax^2+bx+c=0 \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to r_2, r_1 \qquad ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$

$2x^2+5x-3=0, \quad r_1=\frac{1}{2} \quad r_2=-3 \qquad 2(x-\frac{1}{2})(x+3)=ax^2+bx+c$

$2x^2-5x+2=0, \quad r_1=2 \quad r_2=\frac{1}{2} \qquad 2(x-2)(x-\frac{1}{2})=$

Organizar melhor!

$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{2(x-0,5)(x+3)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-2} = \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{-3} = \frac{-7}{3}$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

$(\sqrt{x+2}+\sqrt{6}) \qquad (\sqrt{x+6}+\sqrt{2})$

$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6})}{x} + \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{2})}{x}\right]$

$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})}\right]$

$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+6}+\sqrt{2})}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$

Notação?

Problemas de organização e erros frequentes

a) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}$

$\text{denominador} \quad 2(x^2-\frac{5}{2}x+1) = 2(x-\frac{1}{2})(x-2)$

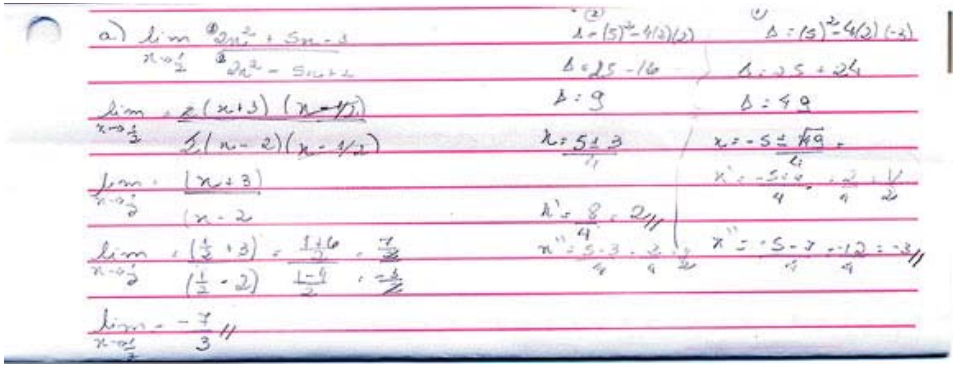
$\text{numerador} \quad 2(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}) = 2(x-\frac{1}{2})(x+3)$

Perdido no texto!

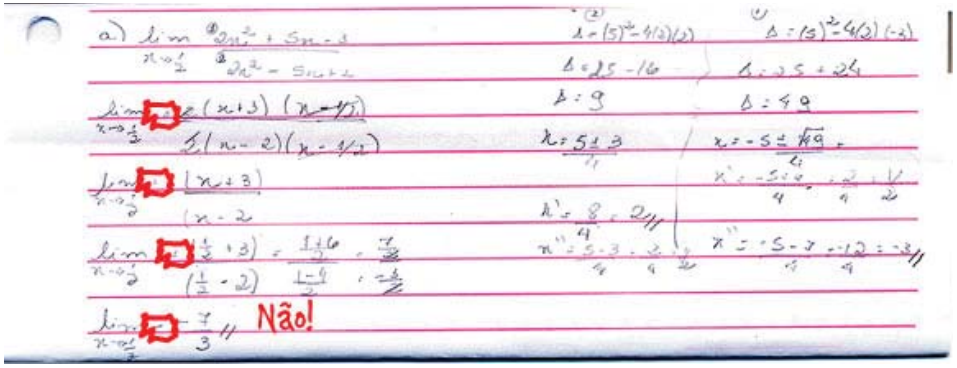
$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2(x-\frac{1}{2})(x+3)}{2(x-\frac{1}{2})(x-2)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{7/2}{-3/2} = -\frac{7}{3}$

Alinhar!

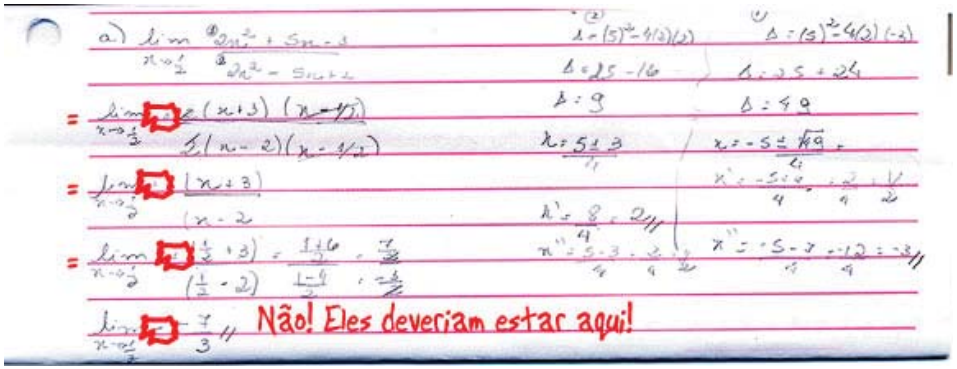
Problemas de organização e erros frequentes



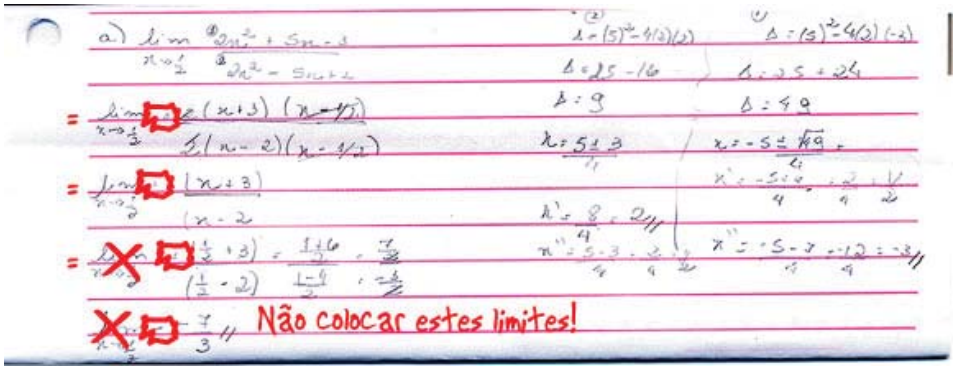
Problemas de organização e erros frequentes



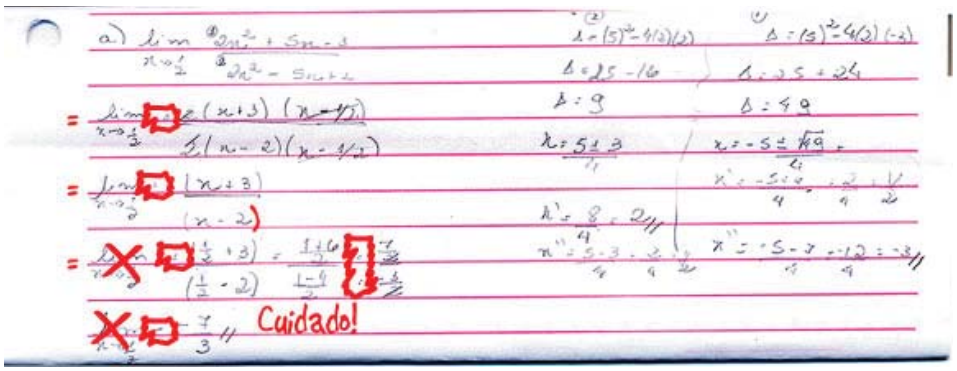
Problemas de organização e erros frequentes



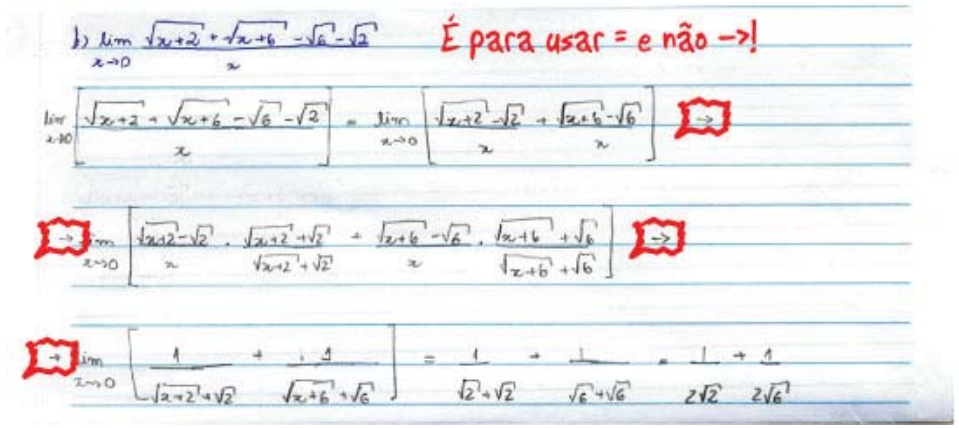
Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes



Os teoremas do confronto e do anulamento

O teorema do confronto

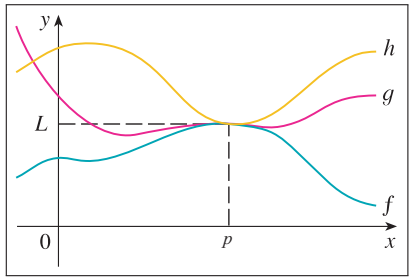
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



O teorema do confronto

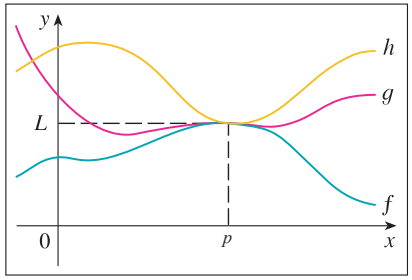
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

O teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x \to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) x^2 \right] = \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^4) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right] = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\,2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\,2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\right] = 0.$$

Limites infinitos e assíntotas verticais

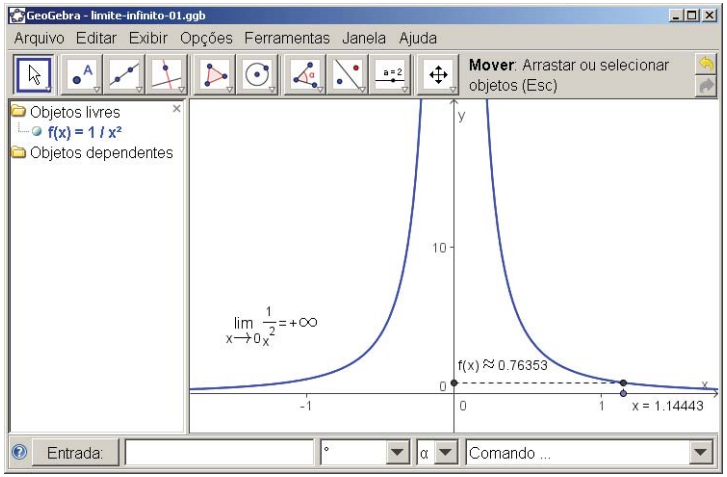
Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$



Limite infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

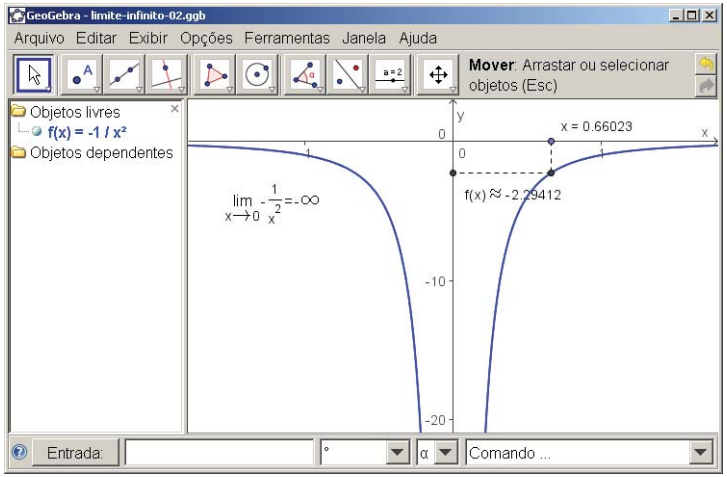
Seja f uma função definida em ambos os lados de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) por meio de uma escolha adequada de x nas proximidades de p, mas não igual a p.

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$



Limite infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

Seja f uma função definida em ambos os lados de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se valores de x próximos de p, porém diferentes do próprio p.

Limites laterais infinitos

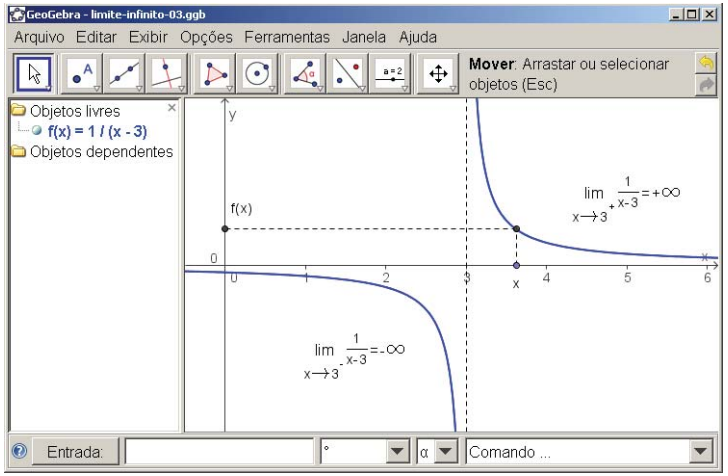
Definições análogas podem ser dadas no caso de limites laterais:

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$



Assíntota vertical

Definição

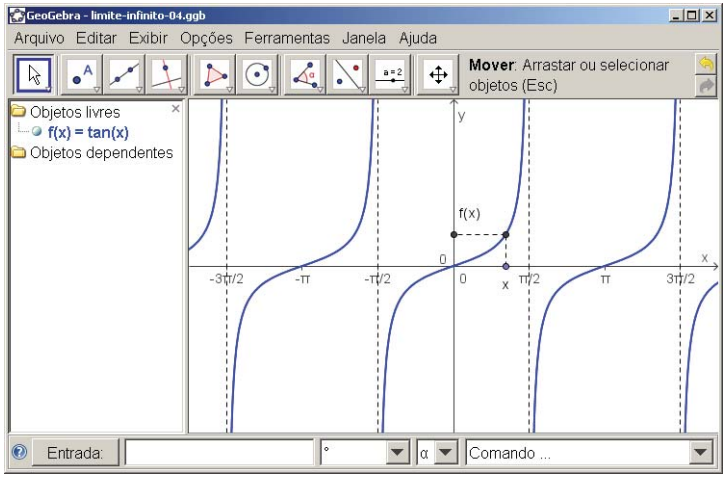
A reta $x = p$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty.$$

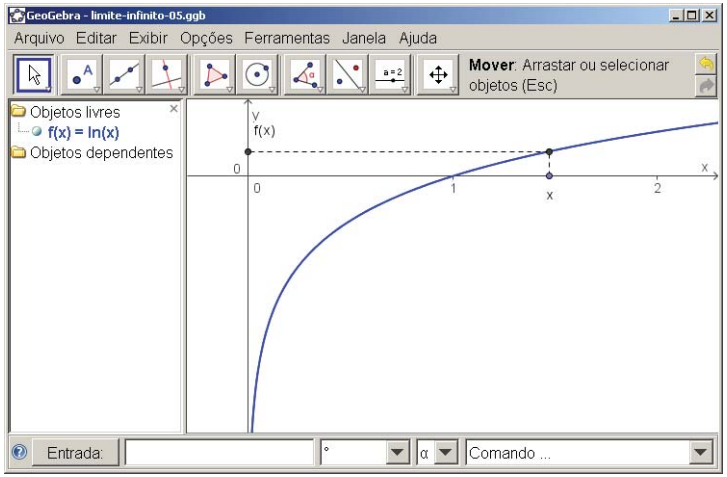
Exemplo

As assíntotas verticais de $y = \text{tg}(x)$ são
$x = +\pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = +3\pi/2$, $x = -3\pi/2$, etc.



Exemplo

A assíntota vertical de $y = \ln(x)$ é a reta $x = 0$ (o eixo y).



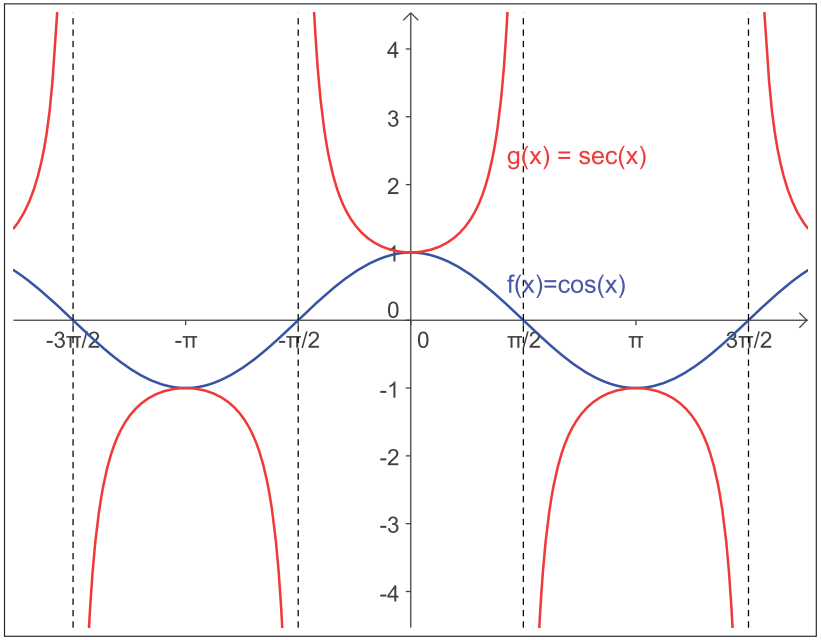
Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart

Determine o limite infinito $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$.

Solução. Temos que se $x \to (-\pi/2)^+$, então $\cos(x) \to 0^+$ e, conseqüentemente, $\sec(x) = 1/\cos(x) \to +\infty$. Assim:

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec(x) = +\infty.$$

Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart



Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x\to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2-1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x\to+1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

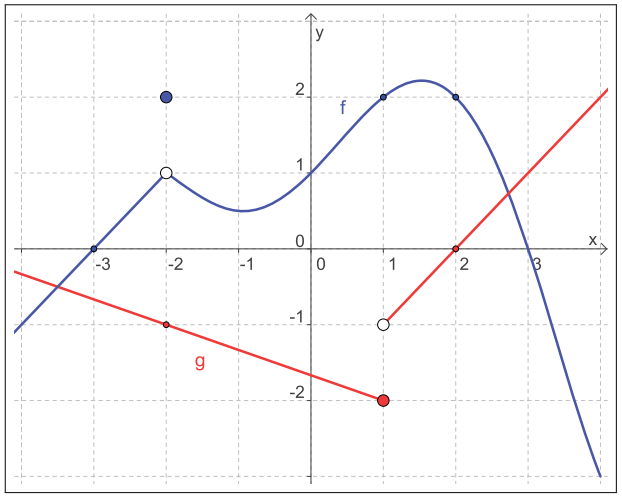
pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

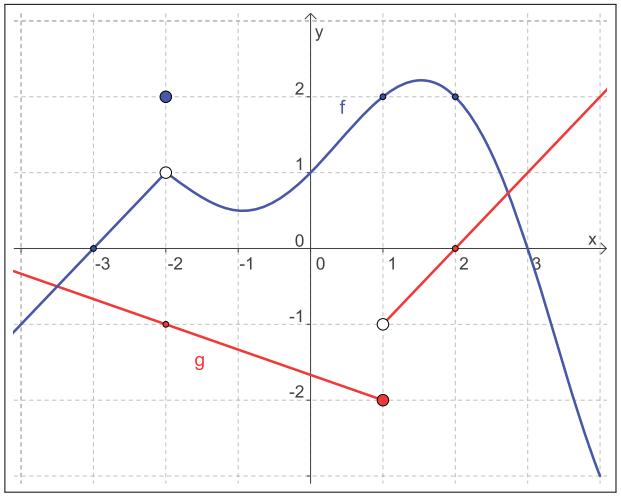
pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exemplo



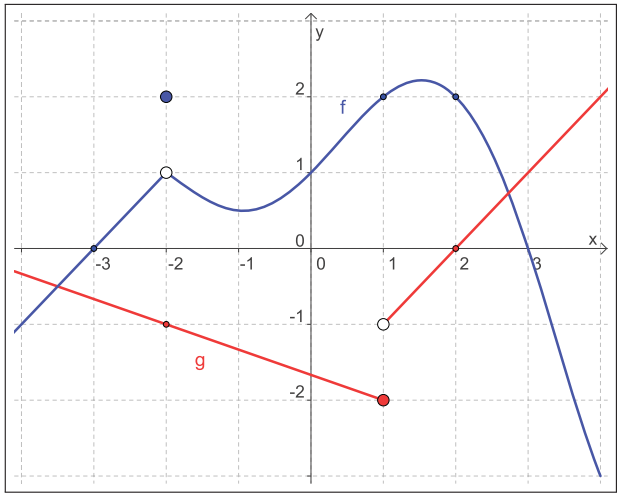
$$\lim_{x \to +2} [g(x)/f(x)] = \left(\lim_{x \to +2} g(x)\right) / \left(\lim_{x \to +2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

Exemplo



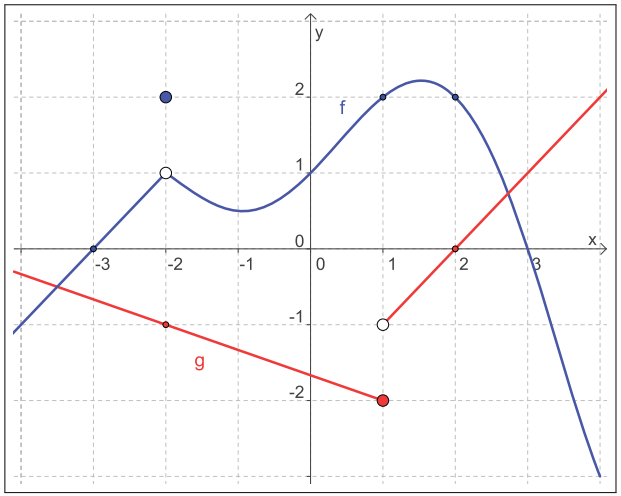
$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$ pois, quando $x \to +2^+$, $g(x) \to 0^+$ e $f(x) \to +2^-$.

Exemplo



$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty$ pois, quando $x \to +2^-$, $g(x) \to 0^-$ e $f(x) \to +2^+$.

Exemplo



$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$ e nem é $-\infty$!

Cálculo I-A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 8

Versão 0.9

Limites no infinito e assíntotas horizontais

Exemplo

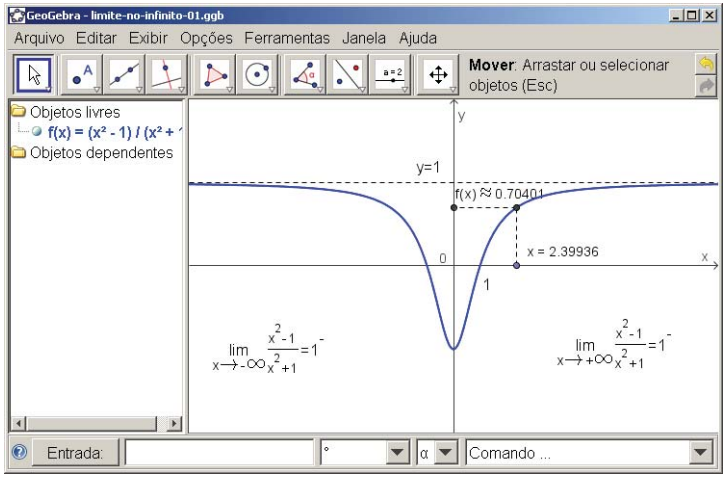
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

x	$f(x)$
-1	$0.000000000\ldots$
-10	$0.980198019\ldots$
-100	$0.999800020\ldots$
-1000	$0.999998000\ldots$

Exemplo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1^- \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1^-.$$



Exemplo

Como justificar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1^-$?

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}}{\dfrac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to 0^+$. Portanto, $1 - 1/x^2 \to 1^-$ e $1 + 1/x^2 \to 1^+$. Conseqüentemente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1^-.$$

Limite no infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $]a, +\infty[$. Dizemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente próximos do número L tomando-se x suficientemente grande.

Limite no infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $]-\infty, a[$. Dizemos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente próximos do número L tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

Assíntota horizontal

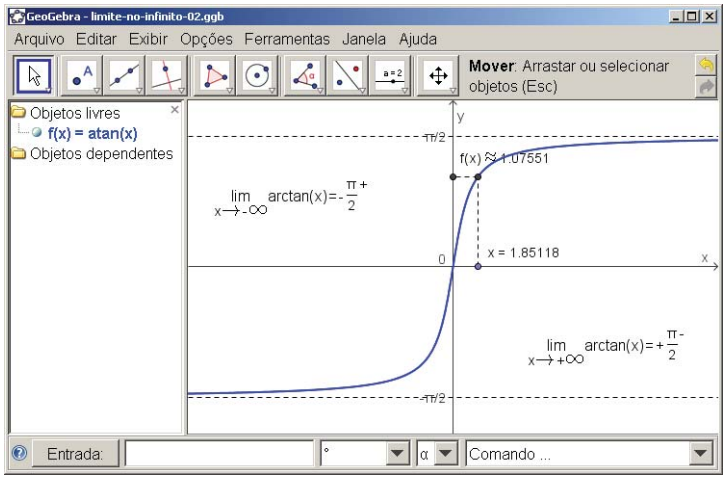
Definição

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

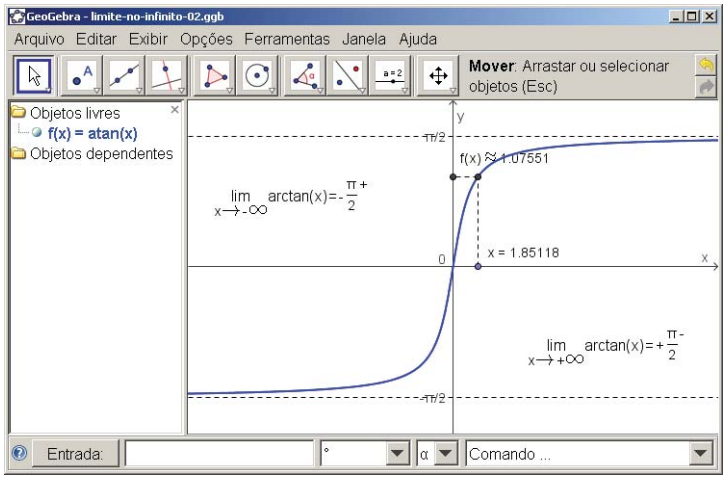
Exemplo

$y = +\frac{\pi}{2}$ é uma assíntota horizontal de $y = \arctan(x)$, pois $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}^{-}$.



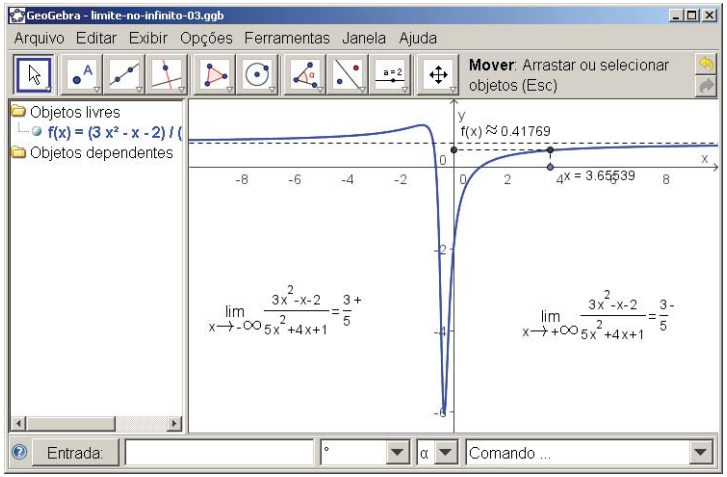
Exemplo

$y = -\dfrac{\pi}{2}$ é uma assíntota horizontal de $y = \arctan(x)$, pois $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}^{+}$.



Exemplo

$y = \dfrac{3}{5}$ é uma assíntota horizontal de $y = \dfrac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1}$, pois $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \frac{3}{5}^{-}$.



Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3\,x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}^{-}.$$

Note que, para x suficientemente grande,

$$3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} < 3 \qquad \text{e} \qquad 5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} > 5,$$

logo

$$\frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}} < \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2 + 1}}{3\,x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3\,x - 5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3\,x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{x}}{\dfrac{3\,x - 5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}^{+}.$$

Logo, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ é uma assíntota horizontal de $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{2\,x^2 + 1}}{3\,x - 5}$.

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = -x$ para $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}^{+}.$$

Logo, $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ é uma assíntota horizontal de $y = f(x) = \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5}$.

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2+\frac{1}{x^2} < \frac{2}{9}\left(3-\frac{5}{x}\right)^2 \text{ e } x<0$$

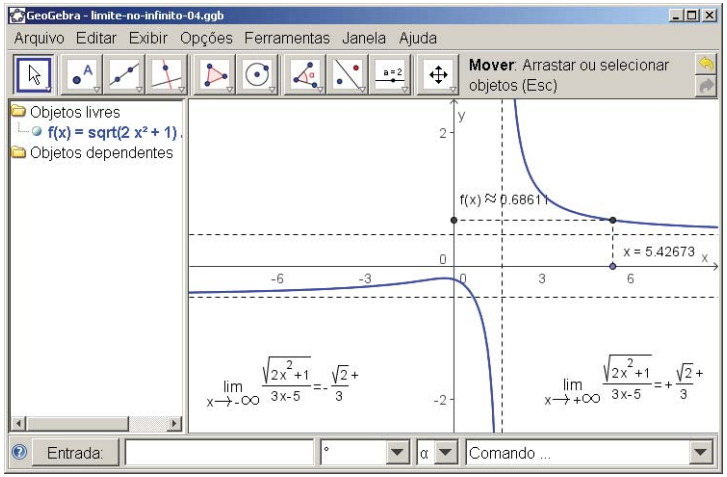
$$\Leftrightarrow\quad \frac{9\,(2\,x^2+1)}{x^2} < \frac{2\,(3\,x-5)^2}{x^2} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow\quad 18\,x^2+9 < 18\,x^2-60\,x+50 \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow\quad x < \frac{41}{60} \text{ e } x<0 \quad\Leftrightarrow\quad x<0.$$

Exemplo

$y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = +\frac{\sqrt{2}}{3}$ são as assíntotas horizontais de $y = \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5}$.



Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

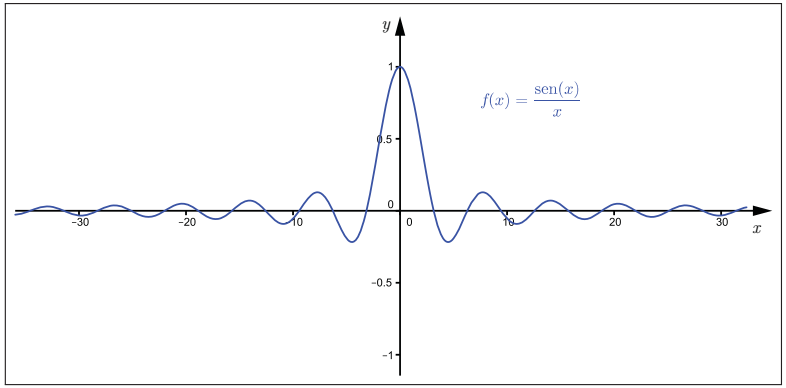
Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito: como $y = \operatorname{sen}(x)$ é uma função limitada (pois $-1 \le \operatorname{sen}(x) \le +1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$, segue-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{1}{x}\right] = 0.$$

Como f é uma função par, segue-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Assim, $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. Observe que o gráfico de f e a assíntota $y = 0$ se interceptam um número infinito de vezes.

Exemplo

A assíntota horizontal $y = 0$ e o gráfico de $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ se interceptam infinitas vezes!



Exemplo

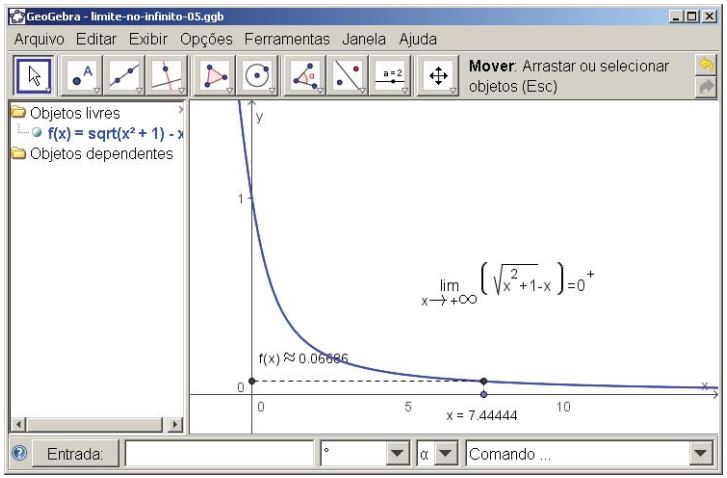
Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= 0^+.\end{aligned}$$

Exemplo

$y = 0$ é assíntota horizontal de $y = \sqrt{x^2+1}-x$.



Exemplo

Encontre $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)$.

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot(x-1) = +\infty,$$

pois $x \to +\infty$ e $x-1 \to +\infty$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x}.$$

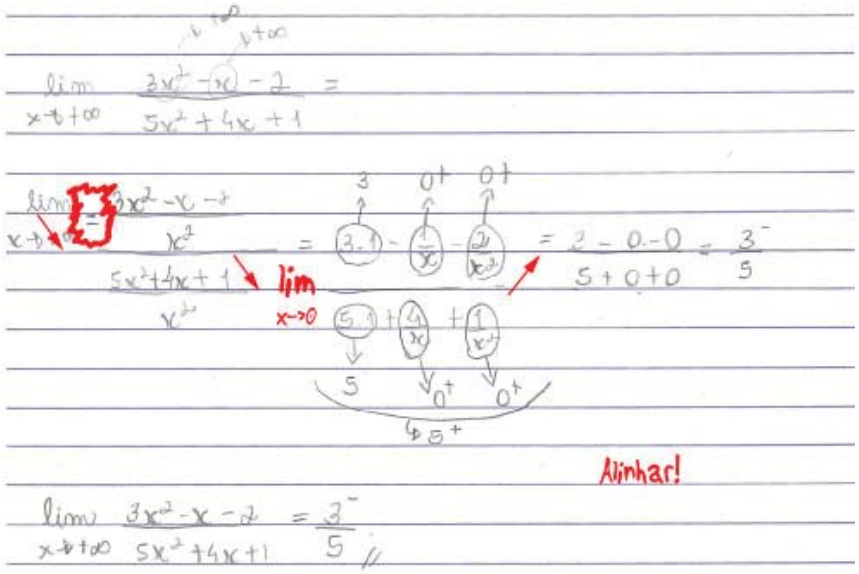
Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+x}{x}}{\dfrac{3-x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\dfrac{3}{x}-1} = -\infty,$$

pois $x+1 \to +\infty$ e $3/x - 1 \to -1$ quando $x \to +\infty$.

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 9

Versão 0.9

Limites fundamentais

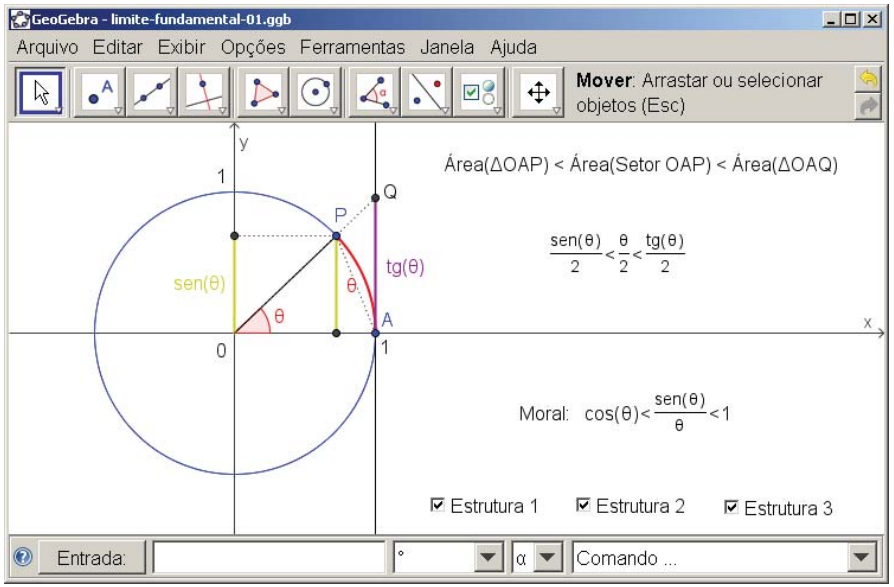
Um limite trigonométrico fundamental

Teorema

Se x é medido em radianos, então

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Um limite trigonométrico fundamental



Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

$$= (1)\cdot\frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Exemplo

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}2\,\theta}{2\,\theta}\cdot 2\right) = 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2\,\theta)}{2\,\theta}$$

$$\overset{(x=2\,\theta)}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 2\,(1) = 2.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3\,x)}{\operatorname{sen}(5\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,\dfrac{\operatorname{sen}(3\,x)}{3\,x}}{5\,\dfrac{\operatorname{sen}(5\,x)}{5\,x}}$$

$$= \frac{3\,(1)}{5\,(1)} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right] = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

Outros dois limites fundamentais

Teorema

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828459045235\ldots$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = 0.367879441171442321\ldots.$$

Motivação: dívida de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}.$$

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Motivação: empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

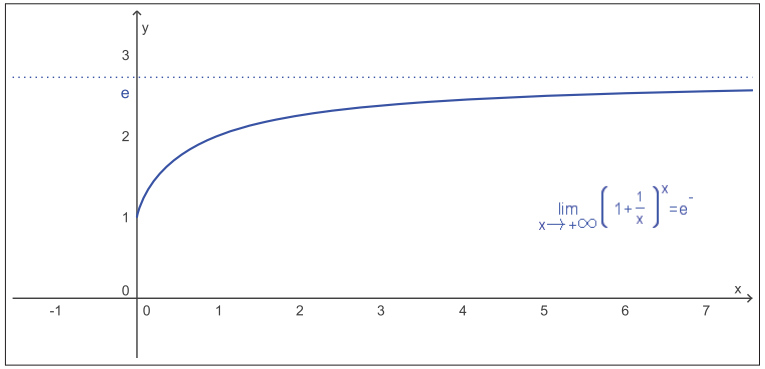
- Moral: como $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e = 2.718281828459045235\ldots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\ldots$ reais.

Motivação: empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando n períodos de $12/n$ meses:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e = 2.718281828459045235\ldots$, o valor justo do pagamento um empréstimo de R$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de $e = 2.718281828459045235\ldots$ reais.



Exemplo

$$\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{2}{u}\right)^u \overset{(x=u/2)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2$$

$$= e^2.$$

Exemplo

$$\lim_{u\to 0^+}(1+u)^{1/u} \overset{(x=1/u)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Limites Indeterminados (A Priori)

Limites

$$\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{x-2} = \frac{5}{2}.$$

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 2$, então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5}{2}$.

Limites

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x-2} = +\infty.$$

Se $\lim_{x\to p^+} f(x) = L > 0$ e $\lim_{x\to p^+} g(x) = 0^+$, então $\lim_{x\to p^+}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Limites indeterminados (a priori)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1.$$

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{?}$.

(indeterminação a priori)

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{?}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{?}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7x+1}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=7.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{?}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=+\infty.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1. \quad \text{(limite fundamental)}$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[2\,\frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{2\,x}\right] = 2.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\right] = +\infty.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} [f(x) - g(x)] = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to +\infty} [(x+7) - (x-5)] = \lim_{x\to +\infty} 12 = 12.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} [f(x) - g(x)] = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty} \left[x^2 - x\right] = \lim_{x\to\infty} x \cdot (x-1) = +\infty.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} [f(x) - g(x)] = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2\right] = \lim_{x\to\infty} x \cdot (1-x) = -\infty.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} [f(x) \cdot g(x)] = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} [f(x) \cdot g(x)] = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{x} \cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} 2 = 2.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} [f(x)\cdot g(x)] = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot x^2\right] = \lim_{x\to\infty} x = +\infty.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x \overset{(x=7\,u)}{=} \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{7}{7\,u}\right)^{7\,u} = \lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^7 = e^7.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}\cdot x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{\frac{7}{x^2}}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{7}{x^2}\cdot x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^7} = \frac{1}{e^7}.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x^4}}}\right)^{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^4}\cdot(-x^2)}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} e^1 = e.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{7}{x^2}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{7}{x^2}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} e^7 = e^7.$$

Limites indeterminados (a priori)

Se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \boxed{?}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x^4}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^4}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 10

Versão 0.9

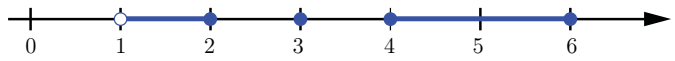
Continuidade

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$



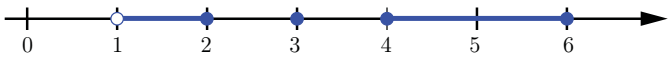
$p = 1.5$ é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$



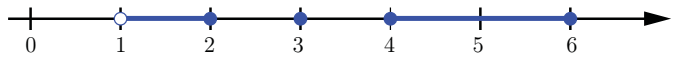
$p = 1.00001$ é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$



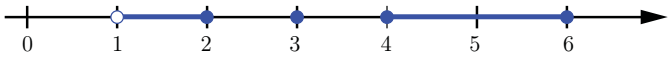
$p = 1$ não é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



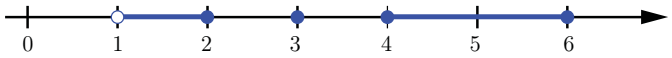
$p = 2$ não é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



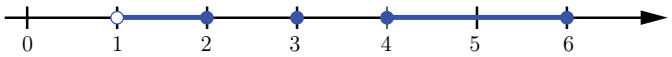
$p = 1.9999999999999999$ é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



$p = 3$ não é um ponto interior de D.

Continuidade

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. Neste caso, dizemos que f é contínua no ponto p se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p).$$

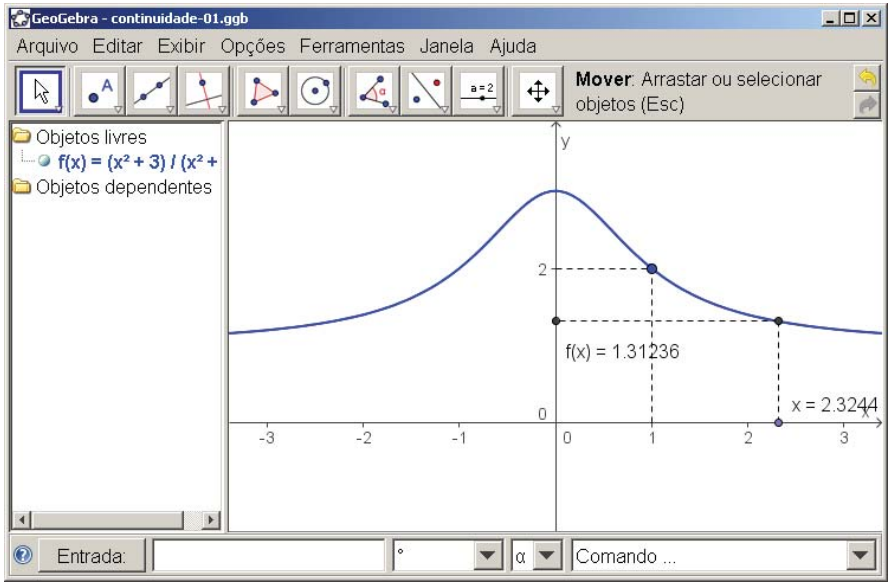
Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D e

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2 = f(1) = f(p).$$

Exemplo



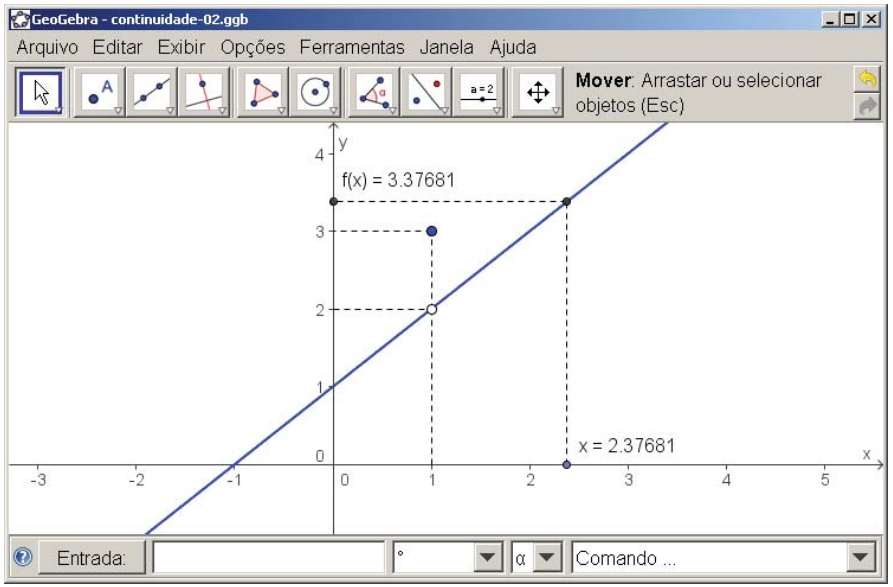
Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq 3 = f(1).$$

Exemplo



Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

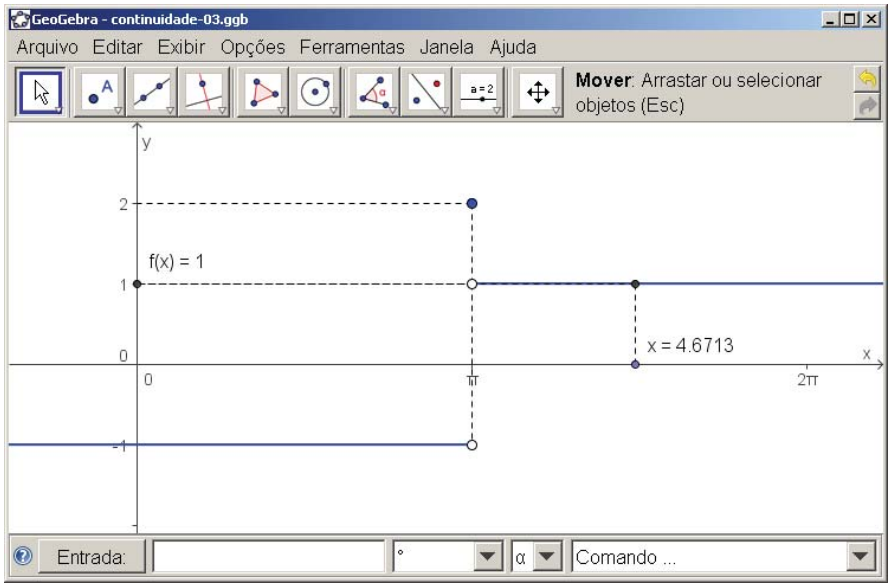
Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{-(x-\pi)}{x-\pi} = -1.$$

Exemplo



Continuidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

(3) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidade em intervalos

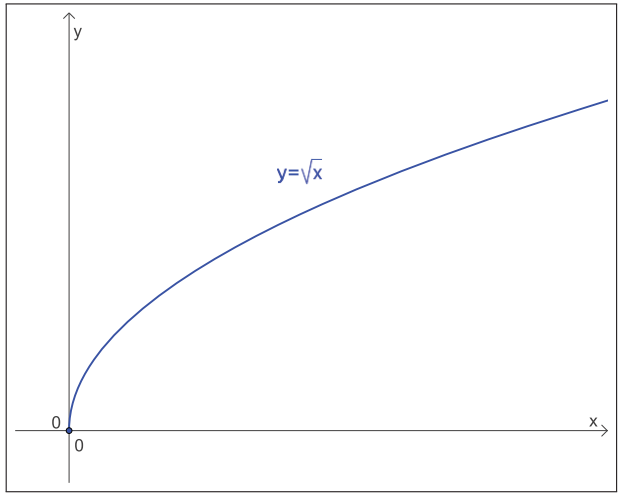
Definição

(4) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $[a, b]$ se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Exemplo

A função $y = \sqrt{x}$ é contínua no intervalo $[0, +\infty)$, pois para todo $p > 0$, $\lim_{x \to p} \sqrt{x} = \sqrt{p}$ e $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0}$.



Continuidade

Teorema

(1) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p. Então

$$f + g, \qquad f - g \qquad \text{e} \qquad f \cdot g$$

também são funções contínuas em p.

(2) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p, com $g(p) \neq 0$. Então f/g também é uma função contínua em p.

(3) Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em p e f é contínua em $g(p)$. Então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.

Em outras palavras, soma, diferença, produto, composição e divisão de funções contínuas são funções contínuas (onde, no caso da divisão, estamos considerando pontos onde o denominador é diferente de zero).

Exemplo

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{|x-1|+5}{x^2+1}} \text{ é uma função contínua}$$

como soma, diferença, produto, divisão e composição de funções contínuas.

Teorema

Teorema

Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e g é uma função contínua em L, então

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to p} f(x)\right) = g(L).$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4\,x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2+5}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}} = \sqrt{\frac{4+0}{1+0}}$$

$$= \sqrt{4} = 2.$$

(*) pois $y = g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua.

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p}\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p}\cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p}\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p}\operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p}\sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p}\operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções elementares

Teorema

Também são contínuas as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi\,x^2+1}{x^2+5}\right) \overset{(*)}{=} \cos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi\,x^2+1}{x^2+5}\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi\,x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2+5}{x^2}}\right)$$

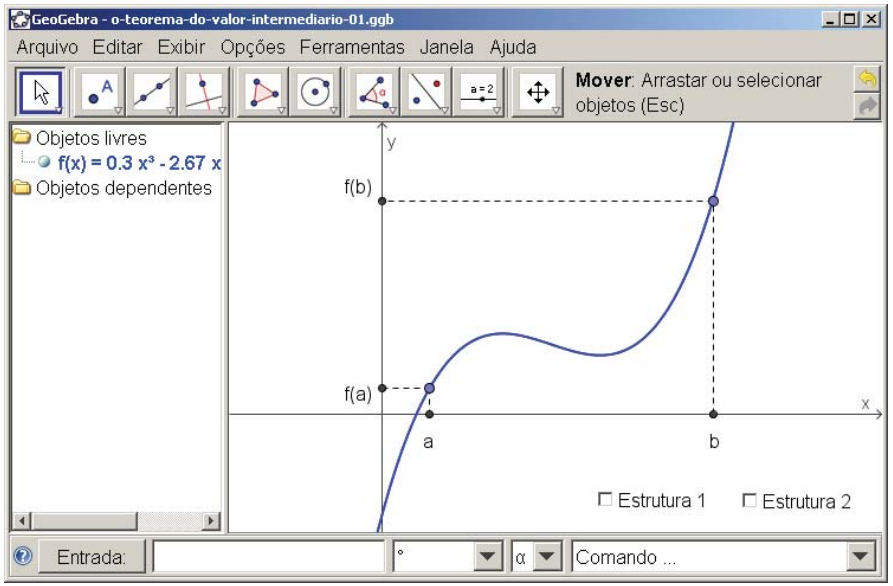
$$= \cos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi+0}{1+0}\right)$$

$$= \cos(\pi) = -1.$$

(*) pois $y = g(x) = \cos(x)$ é uma função contínua.

O teorema do valor intermediário

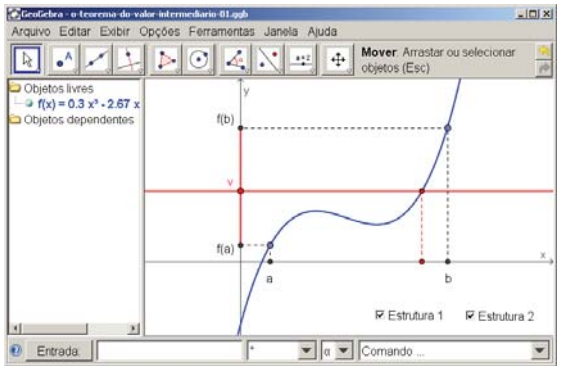
O Teorema do Valor Intermediário



O Teorema do Valor Intermediário

Teorema

Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja v um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = v$.



Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ como soma, diferença e multiplicação de funções contínuas. Agora,

$$f(1) = 4\,(1)^3 - 6\,(1)^2 + 3\,(1) - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 4\,(2)^3 - 6\,(2)^2 + 3\,(2) - 2 = 12 > 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, isto é, existe $c \in (1, 2)$ tal que

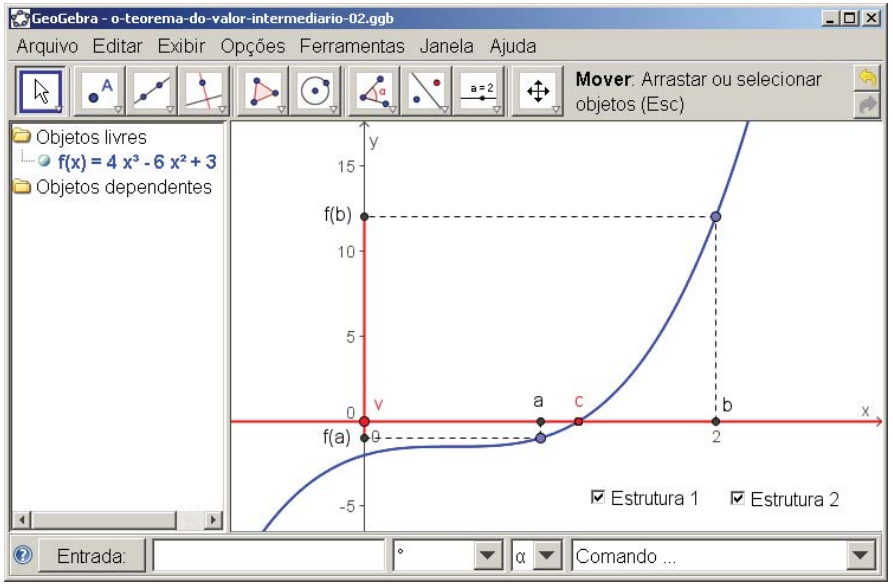
$$4\,c^3 - 6\,c^2 + 3\,c - 2 = 0.$$

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

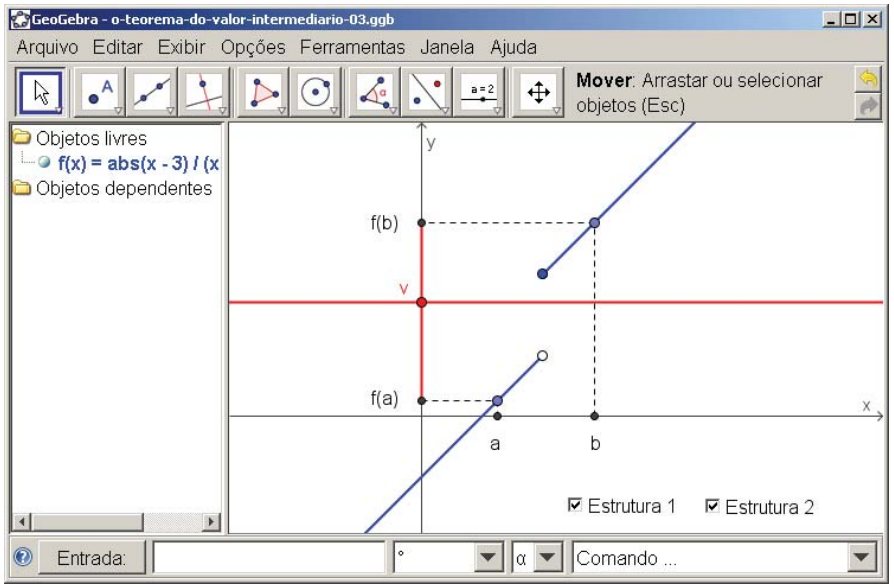
a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	− 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	− 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	− 1.00000	0.18750	− 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	− 0.52343	0.18750	− 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	− 0.20019	0.18750	− 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	− 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	− 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	− 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	− 0.01477	0.00957	− 0.00262
1.22070	1.22265		− 0.01477	0.00957	

Raiz exata: $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2} = 1.22112478\ldots$ (fórmula de Cardano).

Exemplo



Cuidado: a hipótese de continuidade é importante!



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

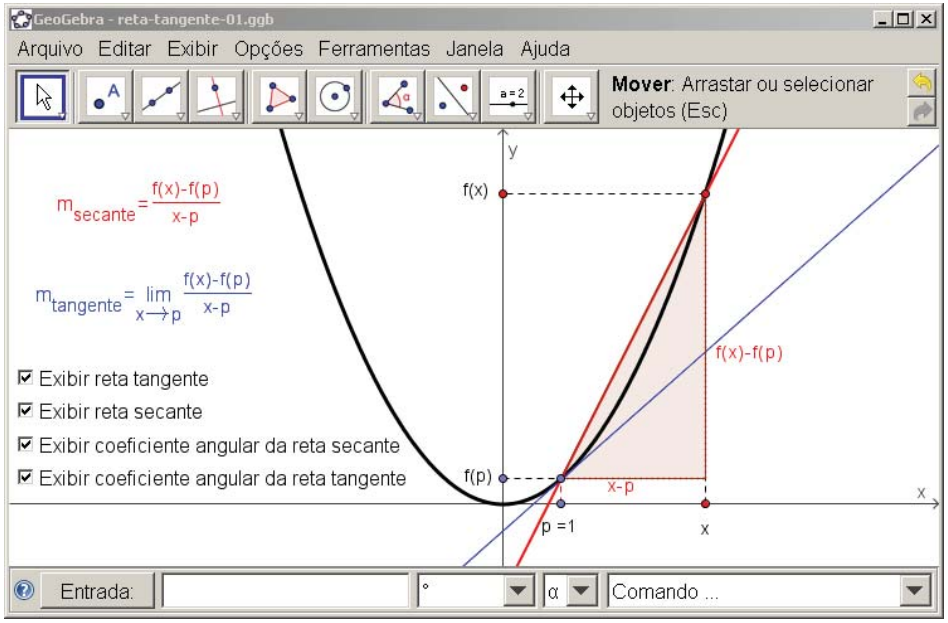
Universidade Federal Fluminense

Parte 11

Versão 0.9

Retas Tangentes e Derivadas

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função



Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2$ no ponto $(p, f(p)) = (1, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 + m \cdot (x - 1)$$

onde

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$ é dada por

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1).$$

Exemplo

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$.

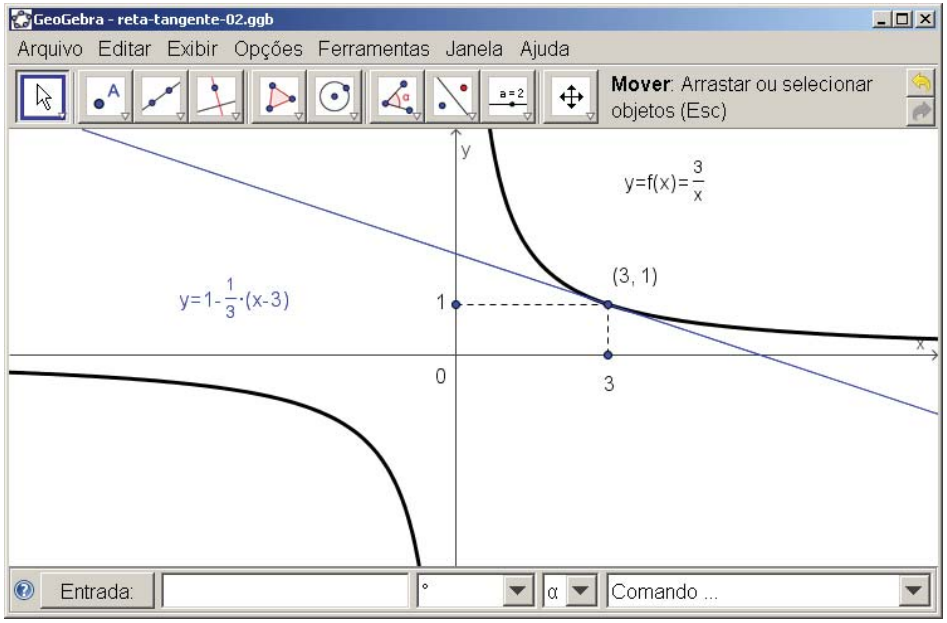
Solução. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 3/x$ no ponto $(p, f(p)) = (3, 1)$ é dado por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)}{x \cdot (x-3)} \\ &= \lim_{x \to 3} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1)$ é dada por

$$y = f(p) + m \cdot (x - p) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (x - 3).$$

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função



Derivada

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. A derivada de f no ponto p, denotada por

$$f'(p) \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}(p)$$

é o limite

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

caso ele exista. Neste caso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) no ponto p.

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^2 - p^2}{x - p} \\ &= \lim_{x \to p} \frac{(x - p) \cdot (x + p)}{x - p} = \lim_{x \to p} (x + p) = 2\,p. \end{aligned}$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2\,p.$$

Um outro limite para a derivada

Se $h = x - p$, então $\quad x = p + h \quad$ e

$x \to p \quad$ se, e somente se, $\quad h \to 0.$

Logo: $\quad f'(p) = \lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p + h) - f(p)}{h}.$

Exemplo

Se $f(x) = x^2$, então

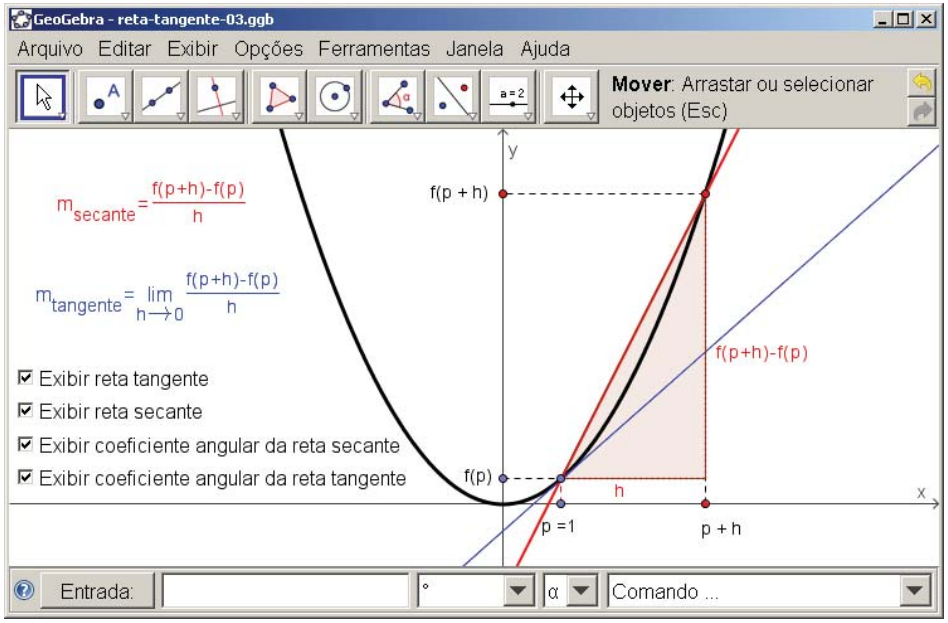
$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(p+h)^2-p^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{p^2+2ph+h^2-p^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2p+h) = 2p.$$

Assim, $y = f(x) = x^2$ é derivável em cada ponto p de $\mathbb{R}$ e

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = 2p.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função



Cuidado!

Nem toda função é derivável! A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$ pois

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \text{ não existe}$$

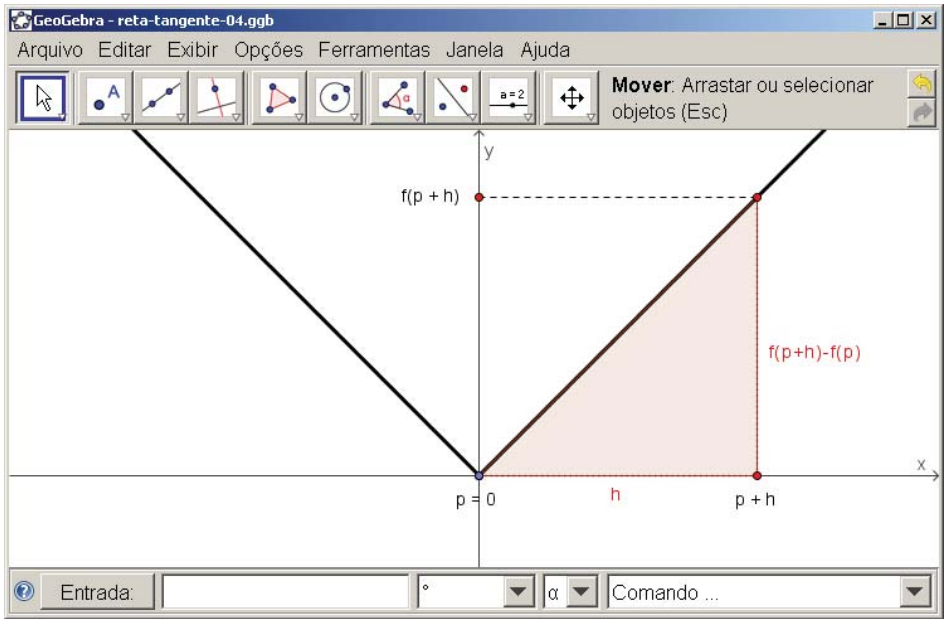
uma vez que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{+h}{h} = +1$$

e

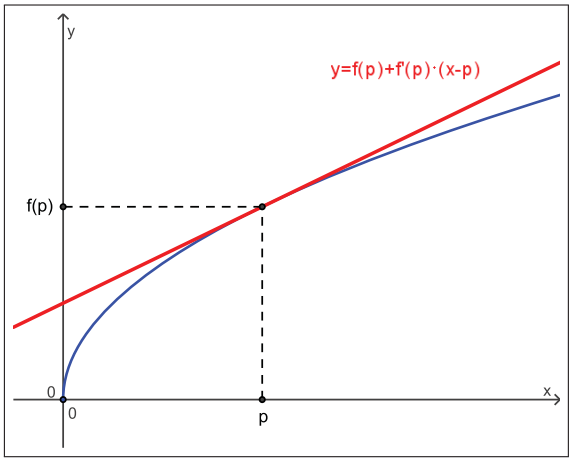
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1.$$

A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$!



A equação da reta tangente

Se f é derivável no ponto p, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.



A derivada como taxa de variação instantânea

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
2.0000	34.00000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = 17 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.1000	18.25000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.1) - s(1)}{1.1 - 1} = 12.5 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.0100	17.25000000

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.01) - s(1)}{1.01 - 1} = 12.05 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.0010	17.01200500

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.001) - s(1)}{1.001 - 1} = 12.005 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

Suponha que a função $s = s(t) = 10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2$ descreva a posição s (em m) de um ponto material no instante t (em s).

t	s
1.0000	17.00000000
1.0001	17.00120005

$$\text{velocidade média} = \frac{s(1.0001) - s(1)}{1.0001 - 1} = 12.0005 \text{ m/s}$$

A derivada como taxa de variação instantânea

$$\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea no tempo 1 s} &= \lim_{t \to 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{10 + 2 \cdot t + 5 \cdot t^2 - 17}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{5 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 7}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{(5 \cdot t + 7) \cdot (t - 1)}{t - 1} \\
&= \lim_{t \to 1} (5 \cdot t + 7) \;=\; 12 \text{ m/s} \\
&= s'(1).
\end{aligned}$$

Derivadas laterais

Diferenciabilidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à direita

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(3) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existe a derivada lateral à esquerda

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Diferenciabilidade em intervalos

Definição

(4) Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em um intervalo da forma $[a, b]$ se f é derivável em cada ponto $p \in (a, b)$ e se existem as derivadas laterais

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

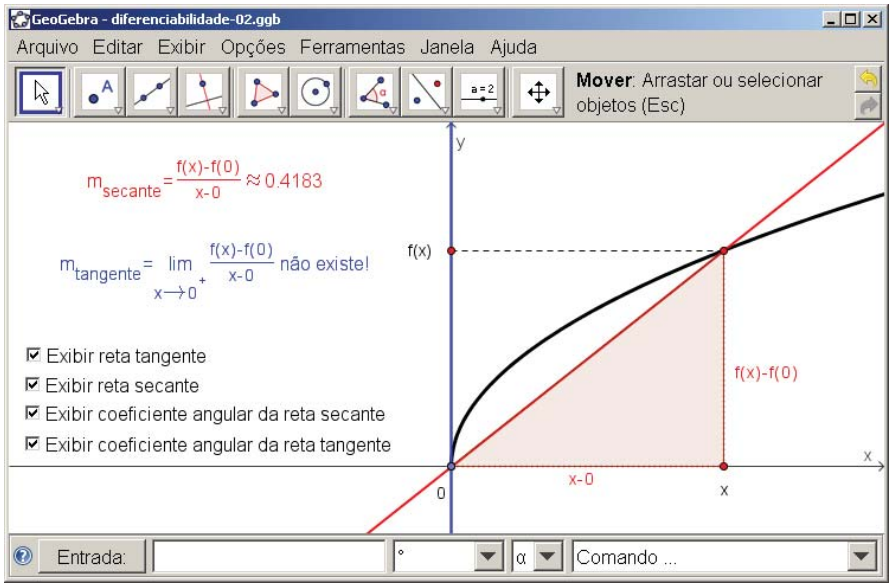
Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$.

Solução. $y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$ porque não existe a derivada lateral à direita $f'_+(0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty. \end{aligned}$$

$y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$



Derivadas de Funções Definidas por Partes

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$

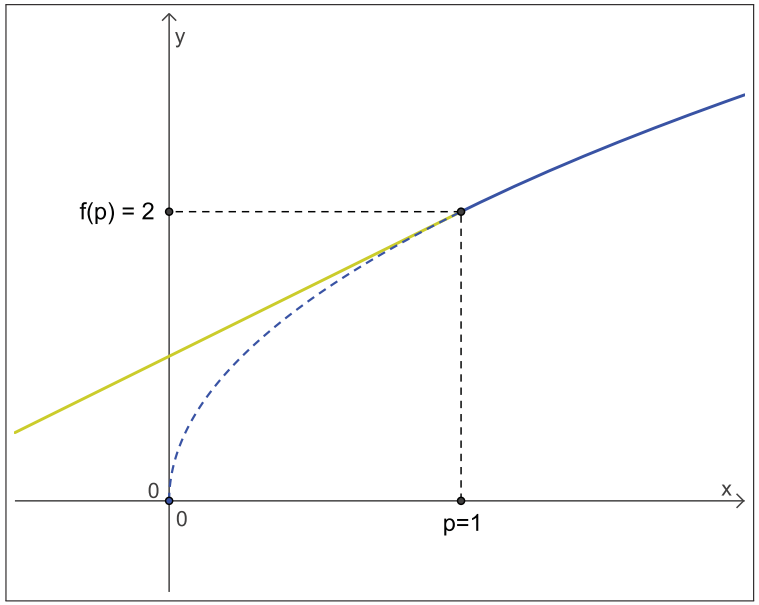
é derivável (diferenciável) em $p = 1$?

Solução. Sim, pois as derivadas laterais $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ existem e são iguais:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

Exemplo



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 12

Versão 0.9

Na Última Aula

Derivada

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. A derivada de f no ponto p, denotada por

$$f'(p) \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}(p)$$

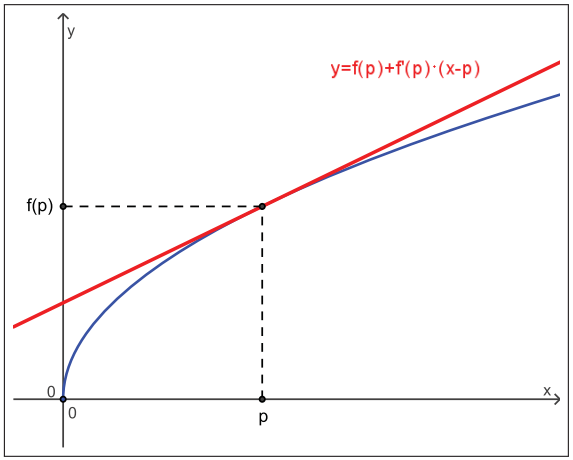
é o limite

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

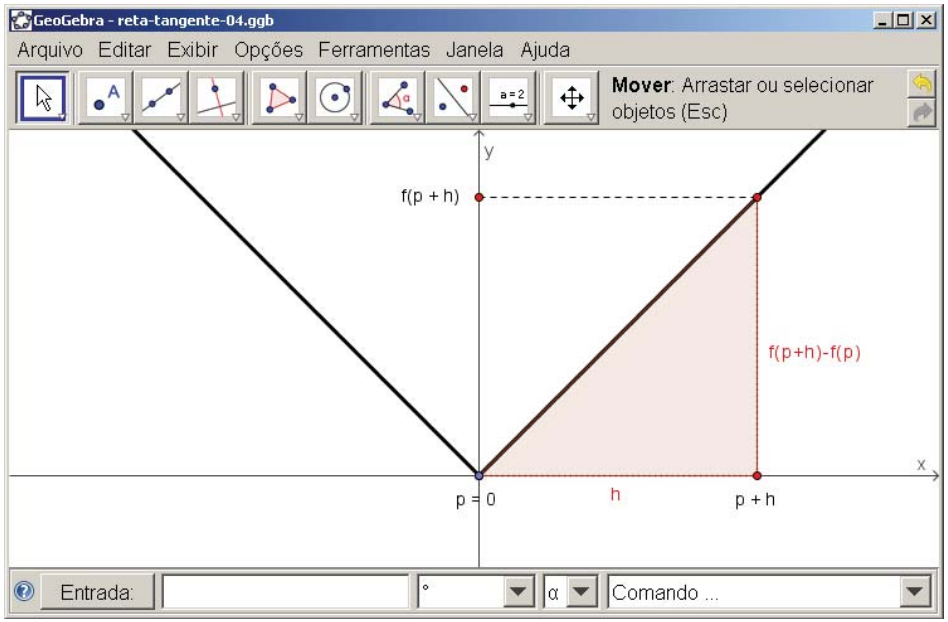
caso ele exista. Neste caso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) no ponto p.

A equação da reta tangente

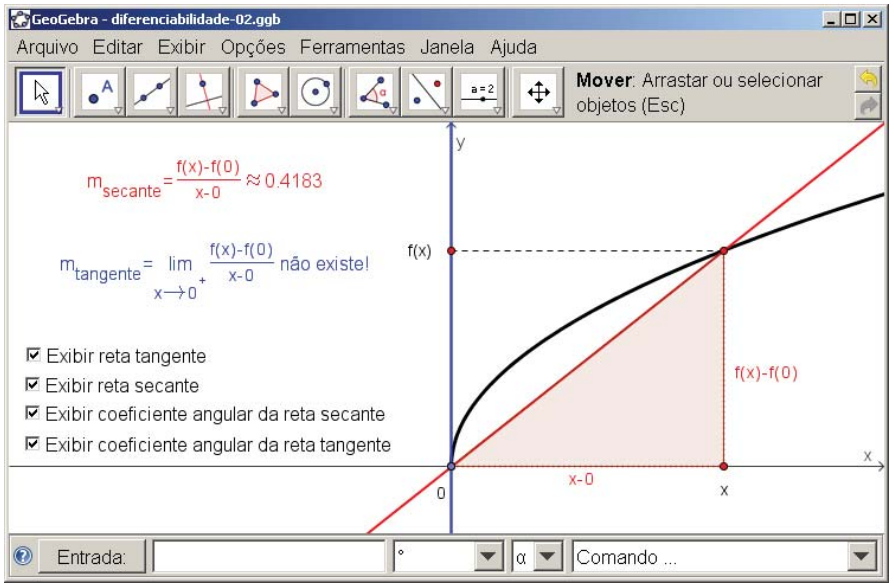
Se f é derivável no ponto p, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.



A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$!



$y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$



Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

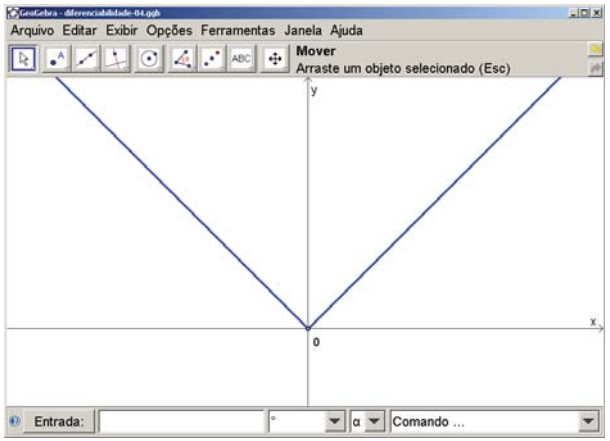
$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\ &= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\ &= f(p) + f'(p) \cdot 0 \;=\; f(p). \end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

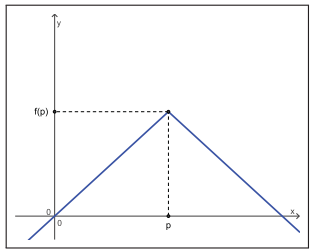
Continuidade não implica em diferenciabilidade

A recíproca do teorema é falsa!

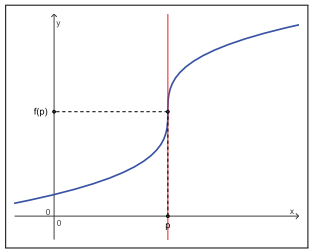
$y = f(x) = |x|$ é contínua em $p = 0$, mas $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.



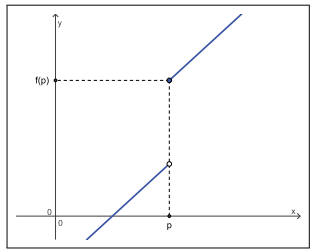
Quando uma função pode deixar de ser derivável?



(bico)



(tangente vertical)



(descontinuidade)

Diferenciação das funções básicas

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[c\cdot f(x)] = c\cdot\frac{df}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x)}{[g(x)]^2}.$$

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x), \qquad [f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$$

$$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x), \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(-x) = \dfrac{d}{dx}\,[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\,(x^5) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}\,(x) + \frac{d}{dx}\,(5)$$

$$\shortparallel$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

$$\shortparallel$$

$$8\,x^7 + 60\,x^4 - 16\,x^3 + 30\,x^2 - 6.$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\,(x \cdot \mathrm{sen}(x))$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{d}{dx}\,(x) \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\,(\mathrm{sen}(x))$$

$$\shortparallel$$

$$1 \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\shortparallel$$

$$\mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\,[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}\,(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}\,(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11.$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2+x-2}{x^3+6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+x-2\right)(x^3+6)-(x^2+x-2)\frac{d}{dx}\left(x^3+6\right)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x^3+6)-(x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{(2x^4+x^3+12x+6)-(3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}. \end{aligned}$$

Exemplos

(a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$

(b) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\, x^{\pi-1}$.

Exemplo

$$\text{Se } f(x) = \text{tg}(x), \text{ calcule } f'(x).$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x)-\text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x)-\text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)+\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x). \end{aligned}$$

Abusos de notação

Notações corretas

Seja $y = f(x)$ uma função derivável.

Notações corretas para a derivada de f no ponto x:

$$f'(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{df}{dx}(x).$$

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\frac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Notações correta para a regra do produto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

e

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Abusos de notação para a regra do produto:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Demonstrações

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right)\\ &= \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1}.\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x) + g'(x),\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} =\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &\quad= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h}+\frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)\\
&= \text{sen}(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 \;=\; \cos(x).
\end{aligned}$$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 13

Versão 0.9

Na Última Aula

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
$\operatorname{tg}(x)$	$\sec^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\operatorname{cossec}^2(x)$
$\operatorname{cossec}(x)$	$-\operatorname{cossec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[c\cdot f(x)] = c\cdot\frac{df}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x)}{[g(x)]^2}.$$

A regra da cadeia

A regra da cadeia

Teorema

A regra da cadeia nos ensina como derivar a composição de duas funções diferenciáveis: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $y = (f \circ g)(x)$ é diferenciável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, com a outra notação,

$$\frac{d(f\circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Usando abuso de notação, a regra da cadeia fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = (5 \cdot x)^3$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = 5 \cdot x \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^3.$$

Como $f'(u) = 3 \cdot u^2$ e $g'(x) = 5$, segue-se que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(5\,x) \cdot g'(x) = 3 \cdot (5\,x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (5\,x)^2.$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y = f(u) = u^2.$$

Como $f'(u) = 2 \cdot u$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, segue-se que

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\cos(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = h(x) = \sqrt{x^3 + x}$.

Solução. Temos que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

onde $u = g(x) = x^3 + x$ e $y = f(u) = \sqrt{u}$. Como

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3\,x^2 + 1,$$

segue-se que $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot g'(x)$ e, consequentemente,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3\,x^2 + 1) = \frac{3\,x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

A regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{f}_{\text{função de fora}}\ \underbrace{(g(x))}_{\text{calculada na função de dentro}}\Big] = \underbrace{f'}_{\text{derivada da função de fora}}\ \underbrace{(g(x))}_{\text{calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivada da função de dentro}}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{\operatorname{sen}}_{\text{função de fora}}\ \underbrace{(x^2)}_{\text{calculada na função de dentro}}\Big] = \underbrace{\cos}_{\text{derivada da função de fora}}\ \underbrace{(x^2)}_{\text{calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{(2\,x)}_{\text{derivada da função de dentro}}$$

Exemplo

$$\text{Derive } y = h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1)\,e^x - (x^3+x)\,e^x}{(e^x)^2} \\ &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{(3\,x^2+1) - (x^3+x)}{e^x} \\ &= \cos\left(\frac{x^3+x}{e^x}\right) \cdot \frac{1 - x + 3\,x^2 - x^3}{e^x}. \end{aligned}$$

Regras básicas de derivação

$$\begin{aligned} y &= x^c & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot x^{c-1} \\ y &= \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(x) \\ y &= \cos(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(x) \\ y &= e^x & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= e^x \\ y &= \ln(x) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

$$\begin{aligned} y &= u^c & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx} \\ y &= \operatorname{sen}(u) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx} \\ y &= \cos(u) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx} \\ y &= e^u & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= e^u \cdot \frac{du}{dx} \\ y &= \ln(u) & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule a derivada da função } y = f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}.$$

Solução. Temos que

$$y = e^u, \qquad \text{onde } u = \operatorname{sen}(x).$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = f(x) = \left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Solução. Temos que

$$y = u^9, \qquad \text{onde } u = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = 9\,u^8 \cdot \frac{du}{dx} = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{(1)\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2)}{(2x+1)^2} = \frac{45\,(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}.$$

A regra da cadeia para uma composição de 3 funções

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$(f\circ g\circ h)'(x) = f'((g\circ h)(x))\cdot(g\circ h)'(x) = f'((g\circ h)(x))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz,

$$\begin{aligned}\frac{d(f\circ g\circ h)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}((g\circ h)(x))\cdot\frac{d(g\circ h)}{dx}(x)\\ &= \frac{df}{dx}((g\circ h)(x))\cdot\frac{dg}{dx}(h(x))\cdot\frac{dh}{dx}(x).\end{aligned}$$

Exemplo

Se $y = f(u)$, $u = g(v)$ e $v = h(x)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg}(x)))$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}y' &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x)))\cdot\frac{d}{dx}[\cos(\operatorname{tg}(x))]\\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg}(x)))\cdot[-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x))]\cdot\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)]\\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg}(x)))\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x))\cdot\sec^2(x).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada da função $y = \ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\frac{(1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(1)}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{2\,\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 14

Versão 0.9

Derivadas de ordem superior

Derivadas de ordem superior

Se f é uma função diferenciável, então f' também é uma função, de modo que f' também pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

A nova função f'' é denominada derivada segunda de f, porque ela é a derivada da derivada de f.

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Exemplo

Se $y = f(x) = x\cos(x)$, calcule $f''(x)$.

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\cos(x) + x\frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x).$$

Para calcular $f''(x)$, derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - \left(\frac{d}{dx}(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(x))\right) \\ &= -\mathrm{sen}(x) - (\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)) = -2\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x). \end{aligned}$$

Derivadas de ordem superior em cinemática

Se $s = s(t)$ representa a posição de um objeto que se move em uma linha reta, então sua velocidade é dada por

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t)$$

e sua aceleração é dada por

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}(t).$$

Exemplo

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t,$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6\,t - 12.$$

Derivadas de ordem superior em cinemática

Ordem da derivada	Nome	Nome quando multiplicado pela massa
0	position	–
1	velocity	momentum
2	acceleration	force
3	jerk	yank
4	snap	tug
5	crackle	snatch
6	pop	shake

Exemplo

Se $y = f(x) = x^{100}$, calcule $f^{(100)}(x) = \dfrac{d^{100} f}{dx^{100}}(x)$.

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^0 = 100!.$$

Classes de diferenciabilidade

Classes de diferenciabilidade

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função real.

(1) Dizemos que f é de classe C^0 em D se f é contínua em D. Notação: $f \in C^0$.

(2) Dizemos que f é de classe C^1 em D se $f'(x)$ existe para todo $x \in D$ e se f e f' são contínuas em D. Notação: $f \in C^1$.

(3) Dizemos que f é de classe C^k em D se $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ existem para todo $x \in D$ e se $f, f', \ldots, f^{(k)}$ são contínuas em D. Notação: $f \in C^k$.

(4) Dizemos que f é de classe C^∞ em D se $f^{(i)}(x)$ existe para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in D$ e se $f^{(i)}$ é contínua em D para todo $i \in \mathbb{N}$. Notação: $f \in C^\infty$.

Exemplos

$f(x) = |x|$ é de classe C^0, mas não é de classe C^1.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$ é de classe C^1, mas não é de classe C^2.

$f(x) = x^{100}$ é de classe C^∞.

$$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1}$$ é de classe C^∞.

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe C^∞!

Derivadas de funções inversas

O teorema da função inversa

Teorema

Seja $f\colon I \mapsto J$ uma função de classe C^1, onde I e J são intervalos abertos. Se $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ para todo $x \in J$, então f é inversível e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad \forall x \in J.$$

Demonstração

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{(derivando dos dois lados)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$$\Downarrow \text{(usando a regra da cadeia)}$$

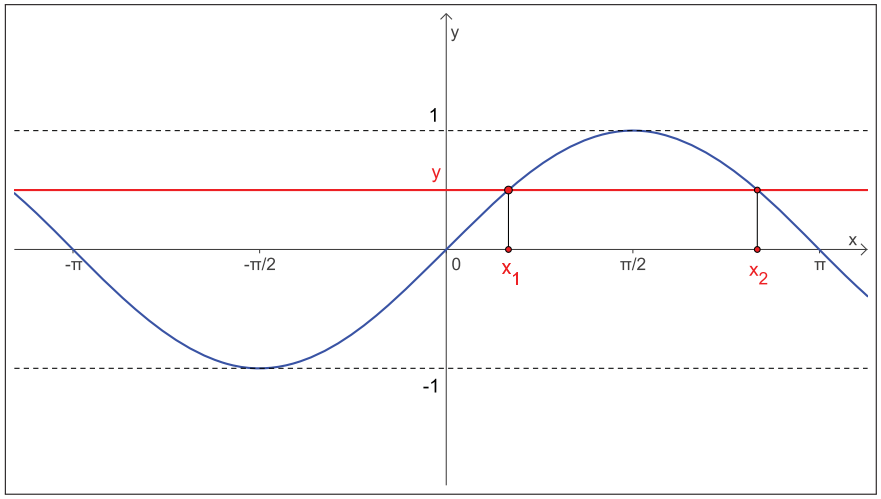
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

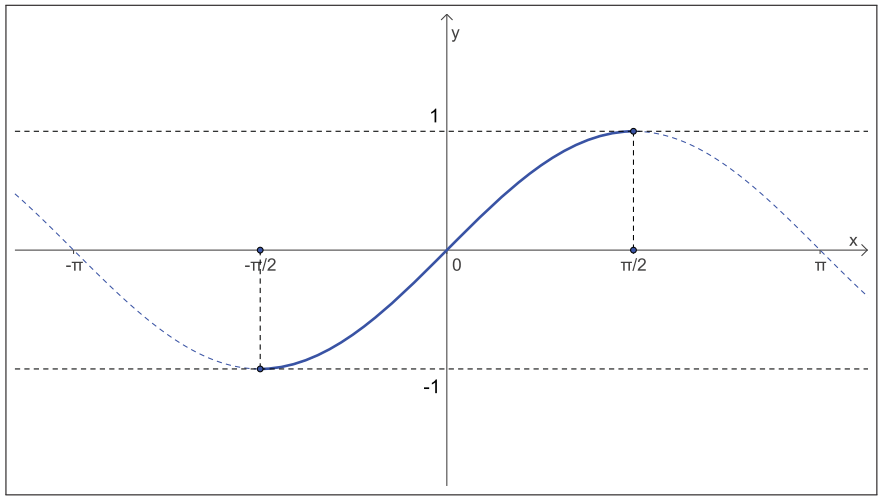
Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$ não é inversível, pois não é injetiva.



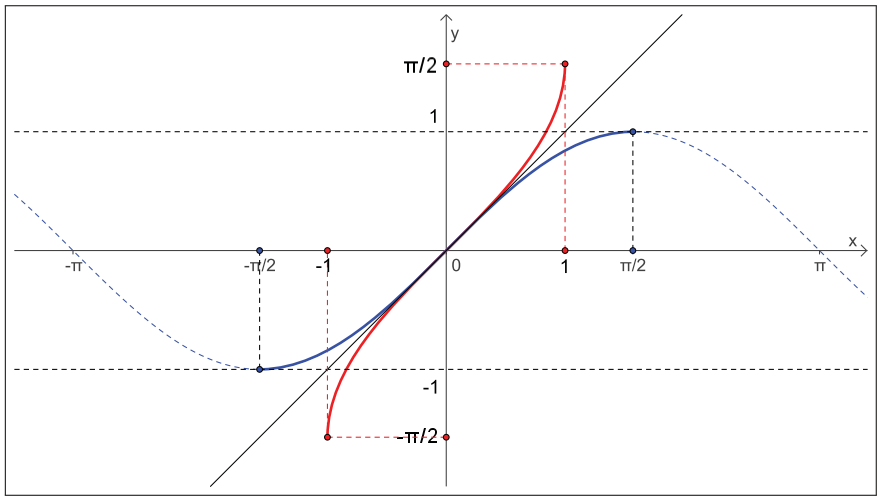
Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f\colon [-\pi/2, +\pi/2] & \to & [-1, +1] \\ x & \mapsto & y = f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



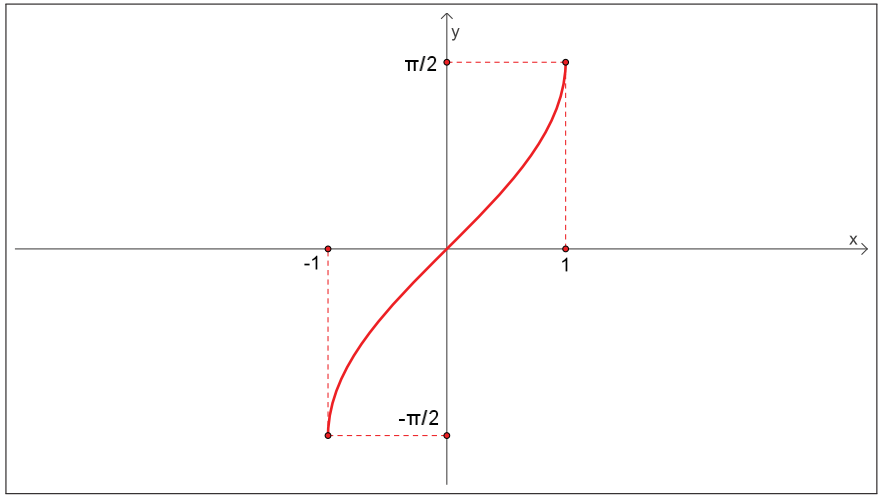
Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon [-1, +1] & \to & [-\pi/2, +\pi/2] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



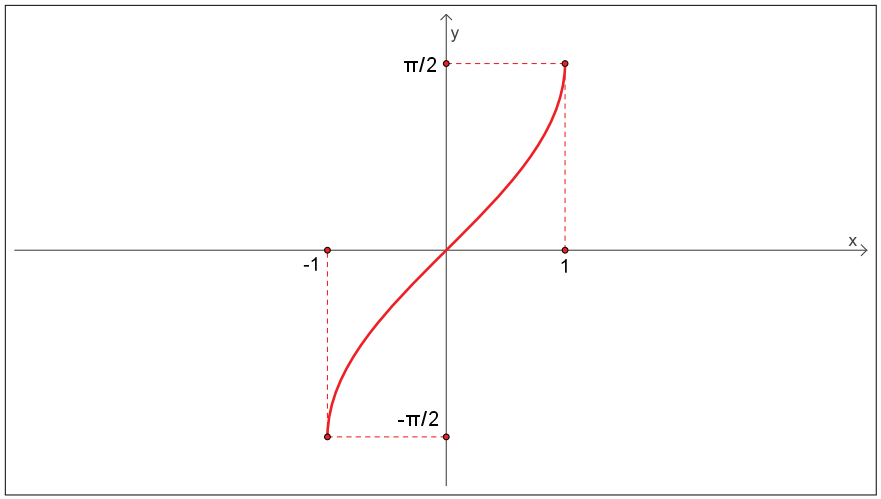
Exemplo

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \ [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco seno é derivável?

O teorema da função inversa garante que $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$ é derivável no intervalo aberto $(-1,+1)$.



Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de $y = \text{arcsen}(x)$, para $x \in (-1,+1)$?

Resposta. Se $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2,+\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$.

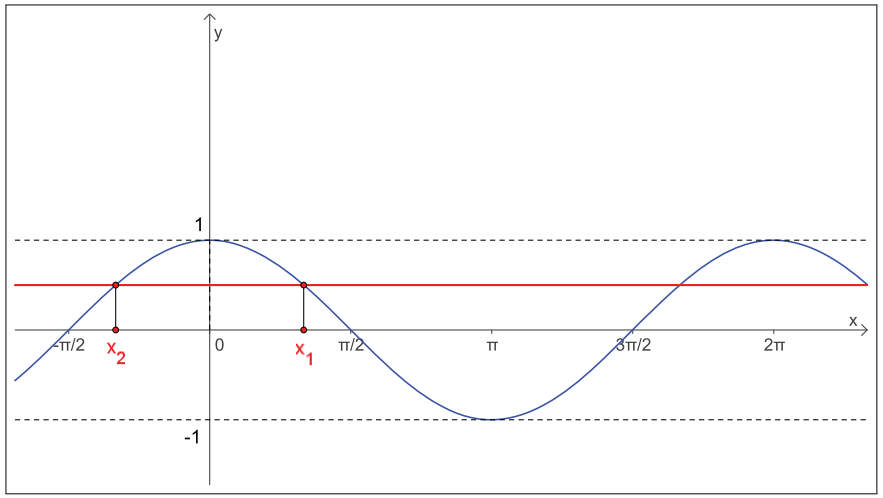
Novo item na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen}(u)] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$

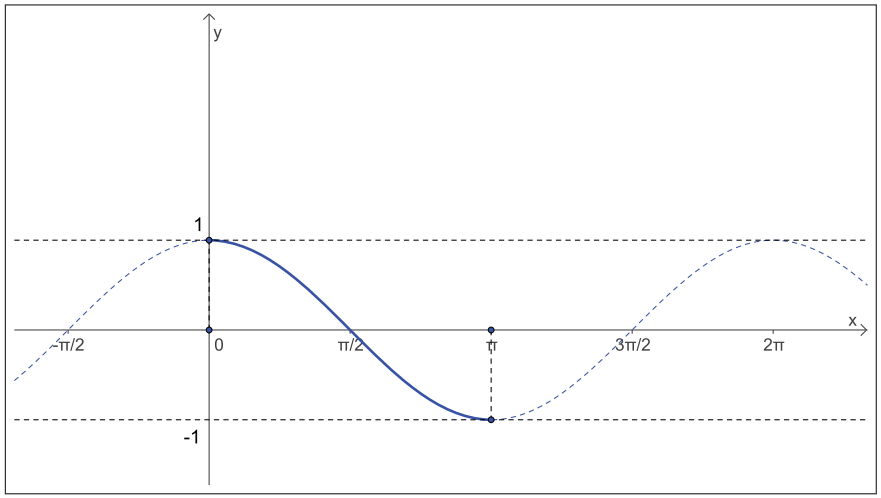
não é inversível, pois não é injetiva.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,\pi] & \to & [-1,+1] \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$

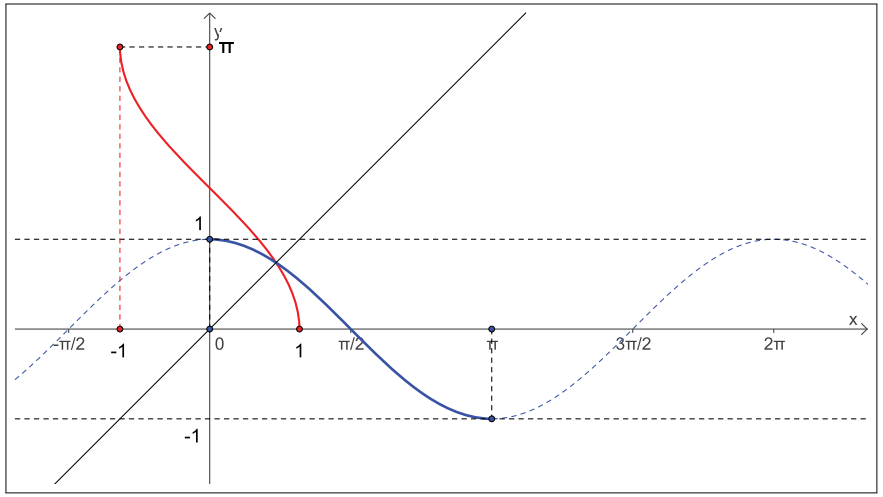
é inversível, pois é bijetiva.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}\colon & [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array}$$

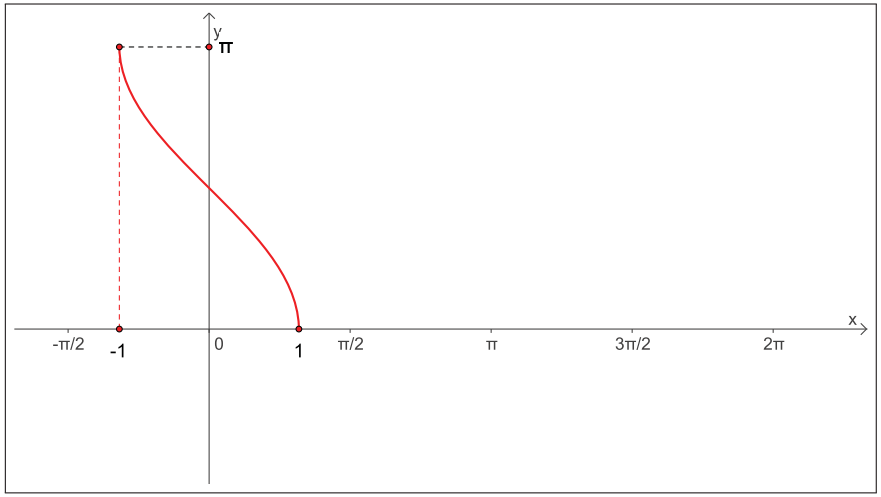
é sua função inversa.



A função arco cosseno

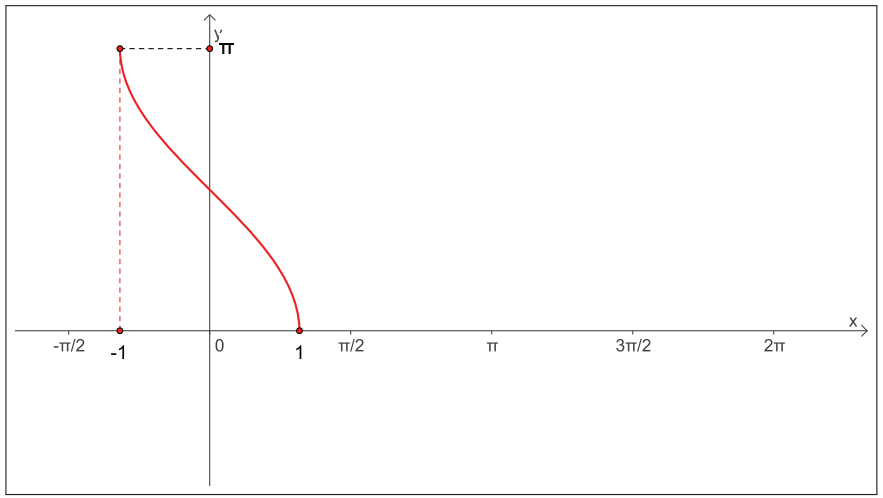
$$\begin{array}{rccl} f^{-1}\colon & [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array}$$

é sua função inversa.



A função arco cosseno é derivável?

O teorema da função inversa garante que $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ é derivável no intervalo aberto $(-1, +1)$.



Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de $y = \arccos(x)$, para $x \in (-1, +1)$?

Resposta. Se $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

pois se $x \in (-1, +1)$, então $\arccos(x) \in (0, \pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

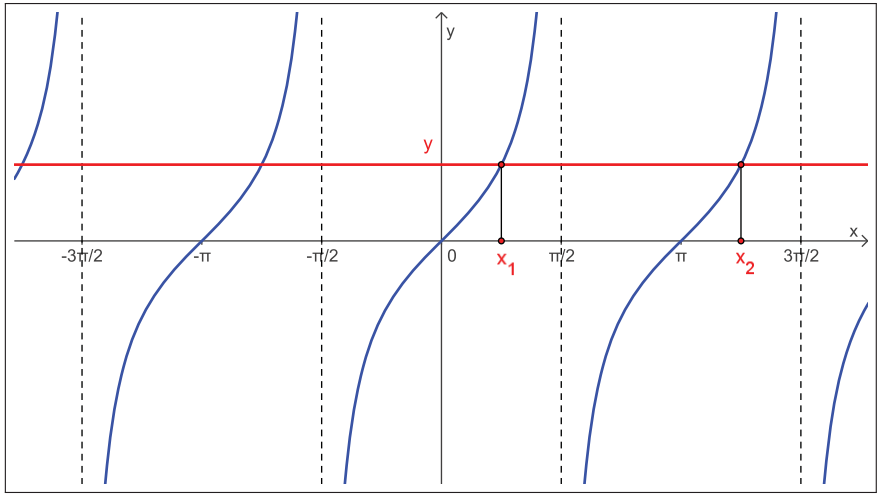
Novo item na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx}[\arccos(u)] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A função arco tangente

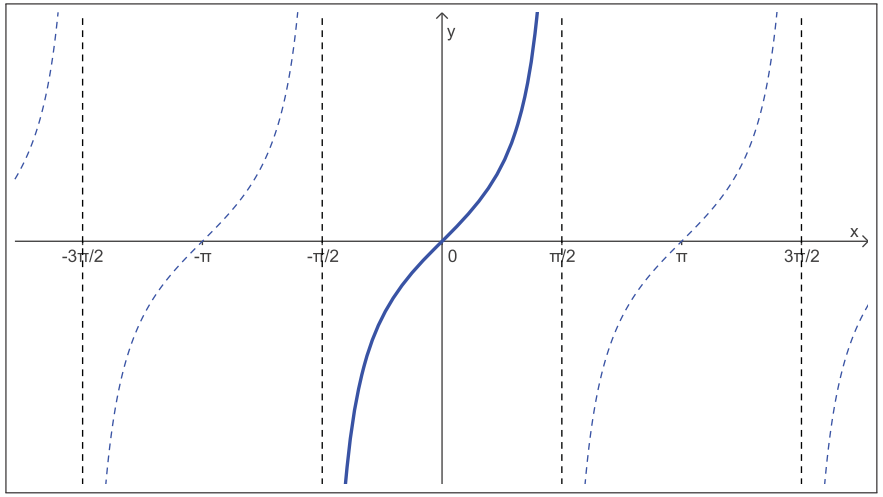
$$\begin{aligned}
f\colon \quad \mathbb{R} - \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\
x \quad &\mapsto \quad y = f(x) = \operatorname{tg}(x)
\end{aligned}$$

não é inversível.



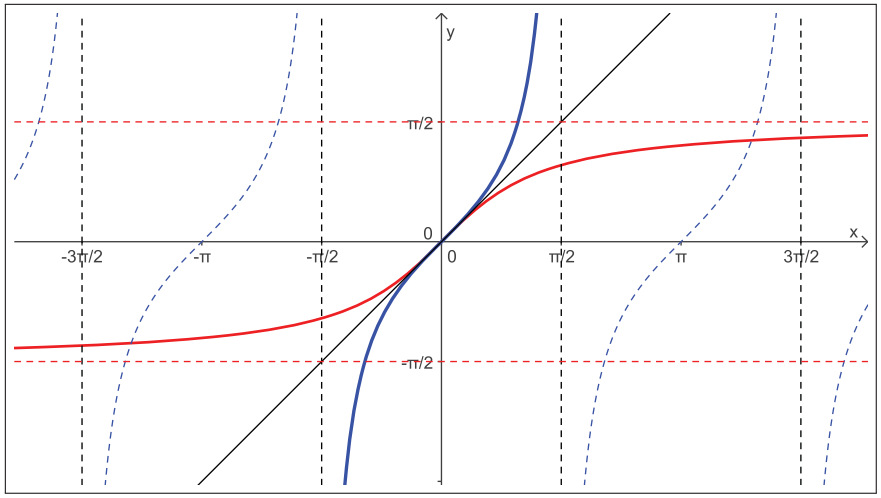
A função arco tangente

$$\begin{array}{rcl} f\colon\ (-\pi/2,+\pi/2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \mathrm{tg}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



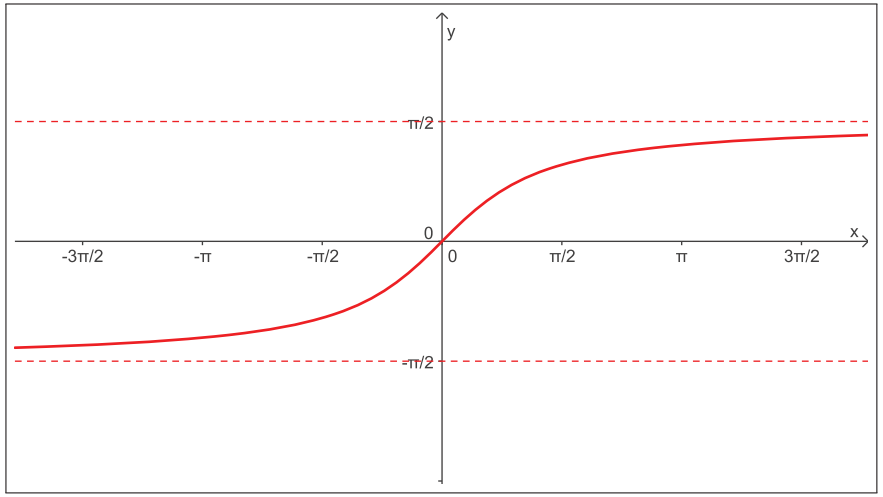
A função arco tangente

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon\ \mathbb{R} & \to & (-\pi/2,+\pi/2) \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



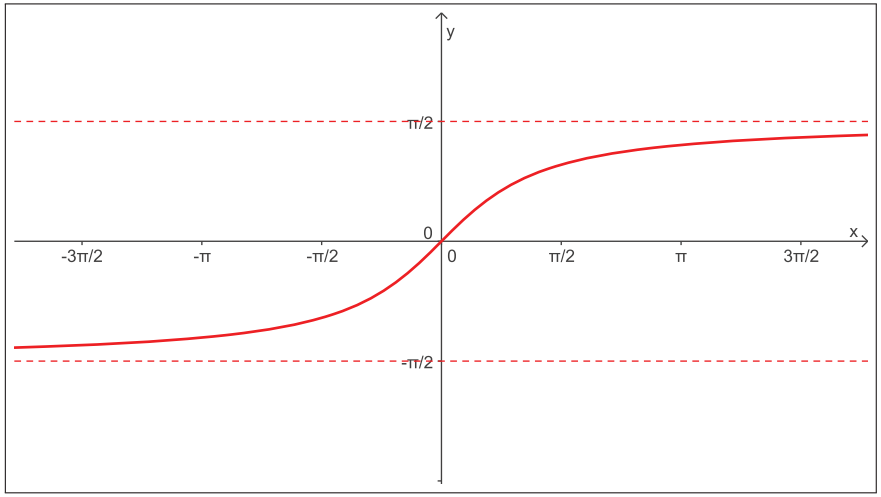
A função arco tangente

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon\ \mathbb{R} & \to & (-\pi/2,+\pi/2) \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco tangente é derivável?

O teorema da função inversa garante que $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$.



Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de $y = \text{arctg}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$?

Resposta. Se $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$
$$\Downarrow$$
$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$
$$\Downarrow$$
$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$
$$\Downarrow$$
$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

Novo item na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx}[\text{arctg}(u)] = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

Função	Derivada
$y = u^c$	$\frac{dy}{dx} = c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \text{sen}(u)$	$\frac{dy}{dx} = +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \cos(u)$	$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \text{tg}(u)$	$\frac{dy}{dx} = +\sec^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \text{arcsen}(u)$	$\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \arccos(u)$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \text{arctg}(u)$	$\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$
$y = e^u$	$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \ln(u)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 15

Versão 0.9

Mais derivadas

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\cdot\ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot\ln(2)}\right] = e^{x\cdot\ln(2)}\cdot\frac{d}{dx}[x\cdot\ln(2)] = e^{x\cdot\ln(2)}\cdot\ln(2) = 2^x\cdot\ln(2).$$

Exemplo

Mais geralmente, se $y = f(x) = a^x$, com $a > 0$, então

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}[a^x] = a^x\cdot\ln(a).$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\cdot\ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot\ln(x)}\right] = e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\frac{d}{dx}[x\cdot\ln(x)]\\ &= e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot(\ln(x)+1).\end{aligned}$$

Exemplo

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Exemplo

Mais geralmente, se $y = f(x) = \log_b(x)$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, então

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left[\log_b(x)\right] = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}.$$

Novos itens na tabela de derivadas!

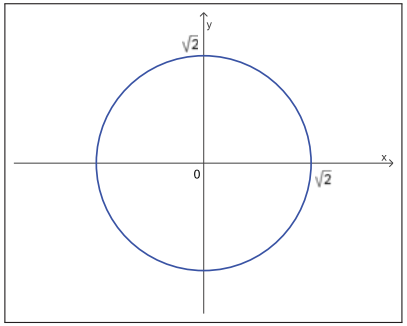
$$\frac{d}{dx}\left[a^u\right] = a^u \cdot \ln(a) \cdot \frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[\log_b(u)\right] = \frac{1}{u \cdot \ln(b)} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Diferenciação implícita

Motivação

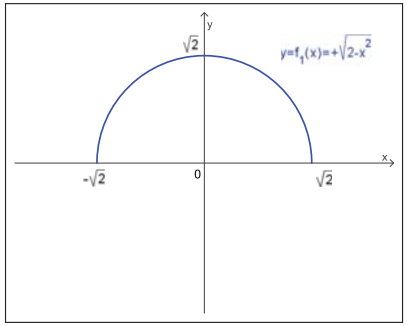
$$x^2 + y^2 = 2$$

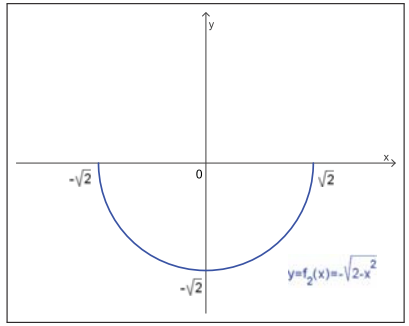


Este círculo não é gráfico de uma função que depende de x!

Motivação

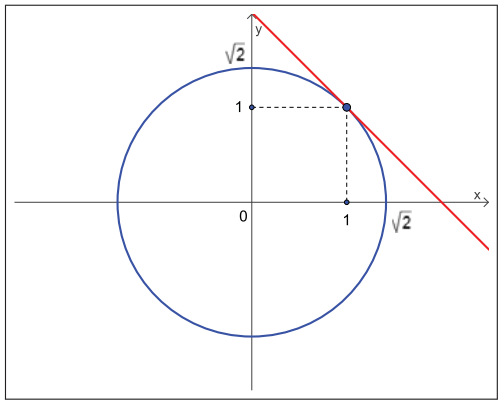
$$x^2 + y^2 = 2$$
$$\Downarrow$$
$$y^2 = 2 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$





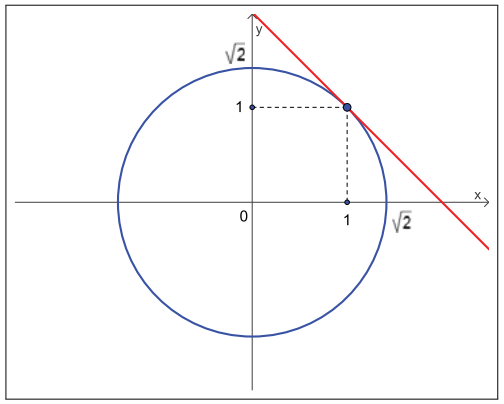
Motivação

Como calcular a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$?



Motivação

Como calcular a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$?



Uma saída: use a função $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$!

Derivação implícita

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2-x^2}$ no ponto $\mathbf{p} = (1,1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1)\cdot(x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}\right]\Bigg|_{x=1}\cdot(x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 + [-1]\cdot(x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2 - x.$$

Derivação implícita

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x, temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left[x^2+y^2\right] = \frac{d}{dx}[2] \quad\Rightarrow\quad 2\,x + 2\,y\,y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2\,(1) + 2\,(1)\,y' = 0 \quad\Rightarrow\quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1,1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1)\cdot(x-1) = 1 + (-1)\cdot(x-1) = 2 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3,3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3+y^3 = 6\,xy \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left[x^3+y^3\right] = \frac{d}{dx}[6\,xy] \quad\Rightarrow\quad 3\,x^2+3\,y^2\,y' = 6\,y+6\,xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

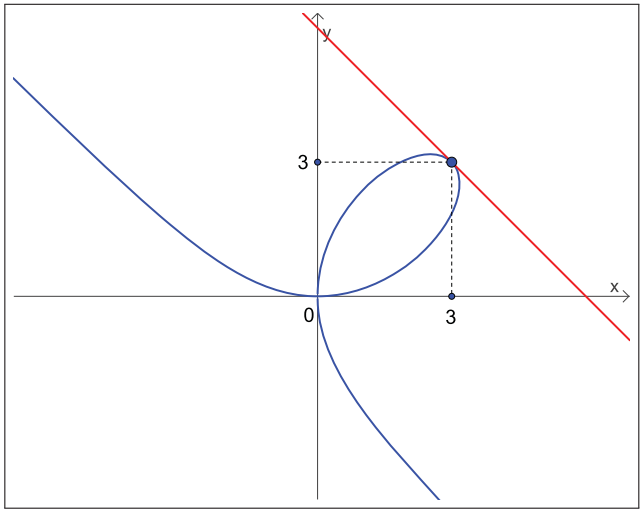
$$\begin{aligned} 3\,(3)^2 + 3\,(3)^2\,y' = 6\,(3) + 6\,(3)y' \quad &\Rightarrow\quad 27 + 27\,y' = 18 + 18\,y' \\ &\Rightarrow\quad y' = f_1'(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3,3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x-3) = 3 + (-1)\cdot(x-3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y!

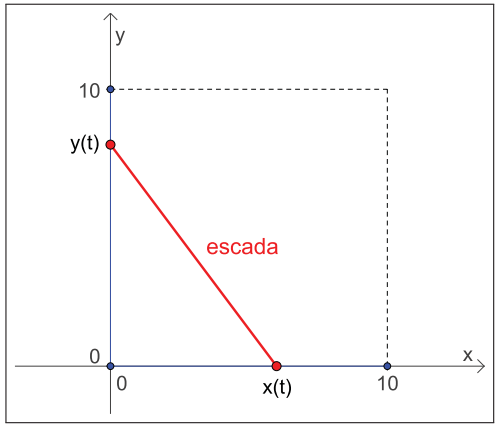
O fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6\,xy$ e a reta tangente $y = 6 - x$ no ponto $\mathbf{p} = (3,3)$.



Taxas relacionadas

Exemplo

Uma escada de 10 m de comprimento está apoiada sobre uma parede. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade constante de 1 m/s, com que velocidade o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 6 m da parede?



Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{ constante } = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[[x(t)]^2 + [y(t)]^2\right] = \frac{d}{dt}[100] \\ &\Rightarrow \quad 2\,x(t)\,\frac{dx}{dt}(t) + 2\,y(t)\,\frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6$ m, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8}\,1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de 100 cm^3/s. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t. Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{ constante } = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \qquad \text{no instante de tempo } t \text{ onde} \quad r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\,\pi\,[r(t)]^3\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(t) = 4\,\pi\,[r(t)]^2\,\frac{dr}{dt}(t) \\ &\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4\,\pi\,[r(t)]^2}\,\frac{dV}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $r(t) = 25$ cm, temos que $\dfrac{dr}{dt}(t) = \dfrac{1}{4\,\pi\,[25]^2}\,100 = \dfrac{1}{25\,\pi}$ cm/s.

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

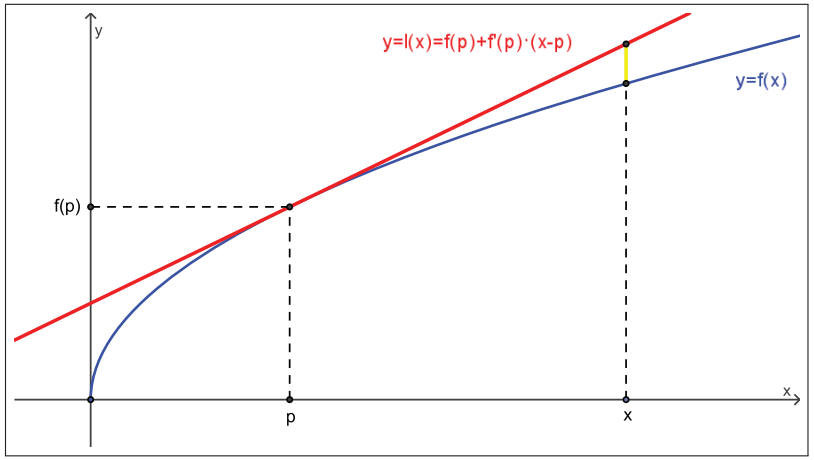
Universidade Federal Fluminense

Parte 16

Versão 0.9

Aproximações lineares (afins)

Aproximações lineares (afins)



$y = l(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$.

$y = l(x)$ é uma função afim que aproxima $y = f(x)$ perto do ponto p.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $\sqrt{4.05}$.

Solução. Se $p = 4$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(p, f(p)) = (4, 2)$ é

$$y = l(x) = f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4).$$

Desta maneira,

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx l(4.05) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (4.05 - 4) = 2.0125.$$

Oráculo: $\sqrt{4.05} = 2.01246117\ldots$.

Exemplo

Use a equação da reta tangente para obter uma aproximação de $e^{0.01}$.

Solução. Se $p = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = e^x$ no ponto $(p, f(p)) = (0, 1)$ é

$$y = l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 + e^0 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Desta maneira,

$$e^{0.01} = f(0.01) \approx l(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01.$$

Oráculo: $e^{0.01} = 1.01005016\ldots$. Note que o cálculo da função $y = l(x)$ usa apenas as quatro operações básicas, as únicas operações que um computador sabe fazer.

Polinômios de Taylor

Polinômios de Taylor de ordem 1

Qual é a melhor reta $y = l(x) = a\,x + b$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

É necessário algum critério para decidir qual reta é "melhor" do que a outra!

Usaremos os critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$.

Polinômios de Taylor de ordem 1

Critérios:

(1) $l(p) = f(p)$ e (2) $l'(p) = f'(p)$,

onde $y = l(x) = a\,x + b$.

De (1) temos que $a\,p + b = f(p)$ e, de (2), temos que $a = f'(p)$.

Assim, $a = f'(p)$ e $b = f(p) - a\,p = f(p) - f'(p)\,p$.

Logo:

$$y = a\,x + b = f'(p)\,x + f(p) - f'(p)\,p = f(p) + f'(p)\,(x - p)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$!

Polinômios de Taylor de ordem 2

Qual é a melhor parábola $y = q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que aproxima uma função $y = f(x)$ perto de um ponto p?

Critérios:

(1) $q(p) = f(p)$, (2) $q'(p) = f'(p)$ e (3) $q''(p) = f''(p)$.

Contas mostram que:

$$y = q(x) = f(p) + f'(p)\,(x - p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x - p)^2.$$

Polinômios de Taylor de ordem n

Mais geralmente, o polinômio de Taylor de $y = f(x)$ no ponto p é

$$y = t_n(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p) + \frac{f''(p)}{2}\,(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}\,(x-p)^3 + \frac{f^{(4)}(p)}{4!}\,(x-p)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}\,(x-p)^n.$$

Usando a notação de somatórios:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i.$$

Exemplo

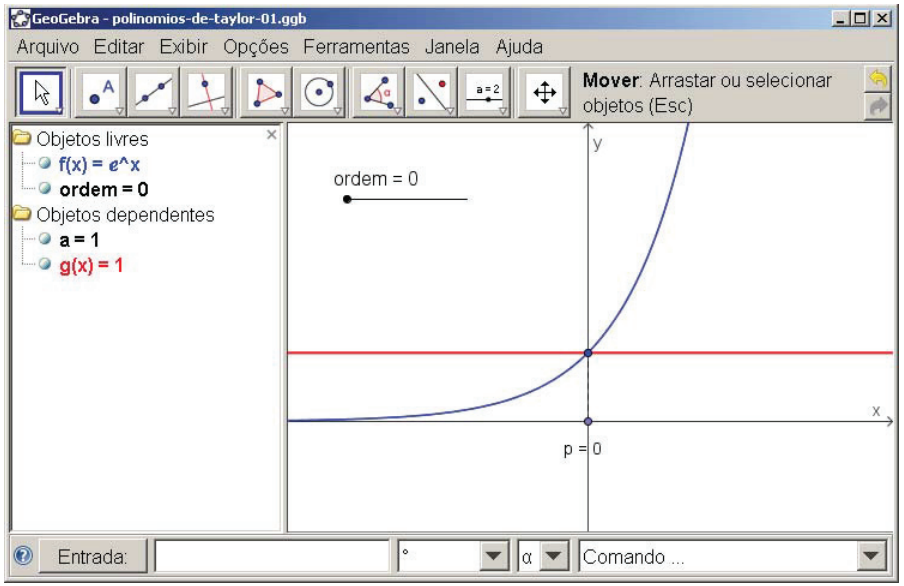
Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 de $y = f(x) = e^x$ no ponto $p = 0$. Em seguida, use-o para obter uma aproximação de $f(0.01) = e^{0.01}$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ e, desta maneira, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $p = 0$ é

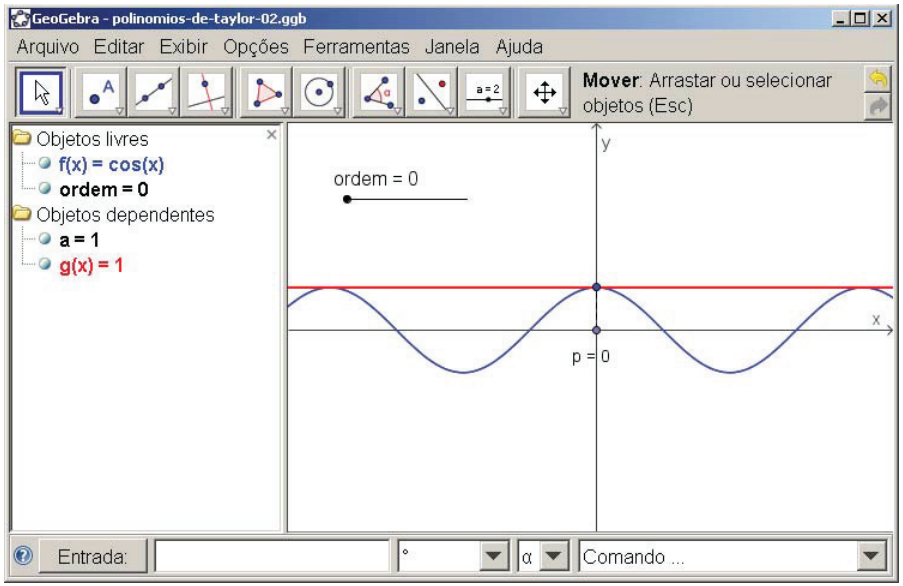
$$\begin{aligned} y &= t_3(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Usando este polinômio, obtemos a aproximação $e^{0.01} = f(0.01) \approx t_3(0.01) = 1 + 0.01 + (1/2)\,(0.01)^2 + (1/6)\,(0.01)^3 = 1.010050166666666666\ldots$. Agora, o oráculo diz que $e^{0.01} = 1.010050167084168057\ldots$.

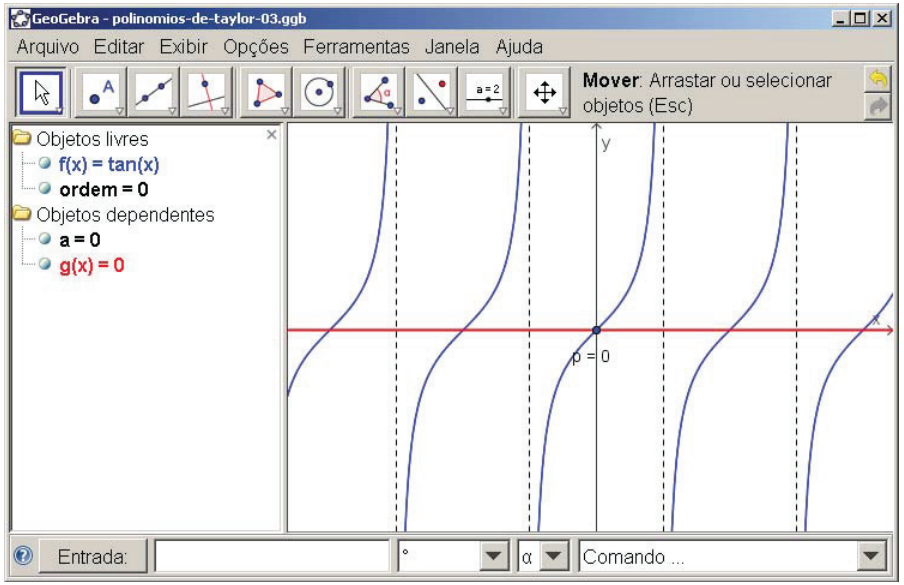
Exemplo



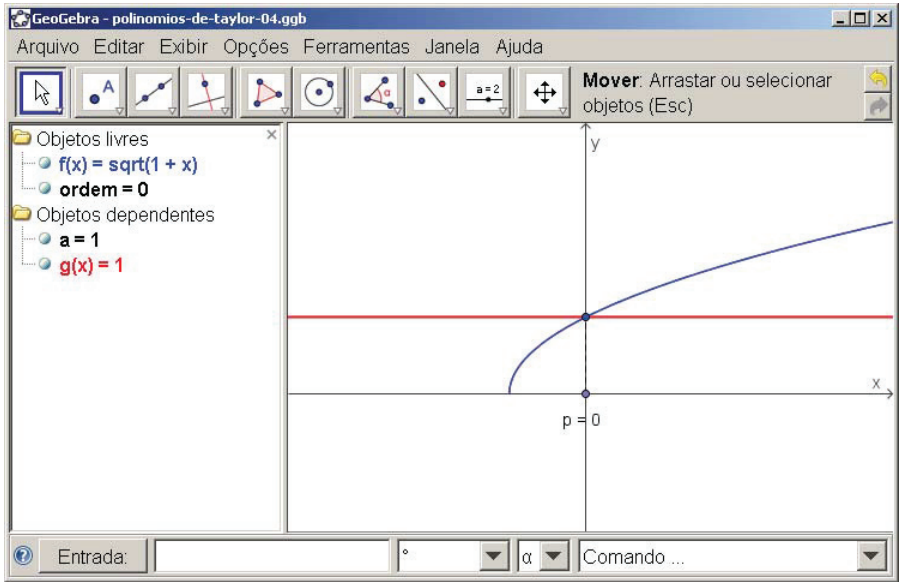
Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$



Exemplo: $y = f(x) = \text{tg}(x)$



Exemplo: $y = f(x) = \sqrt{1+x}$

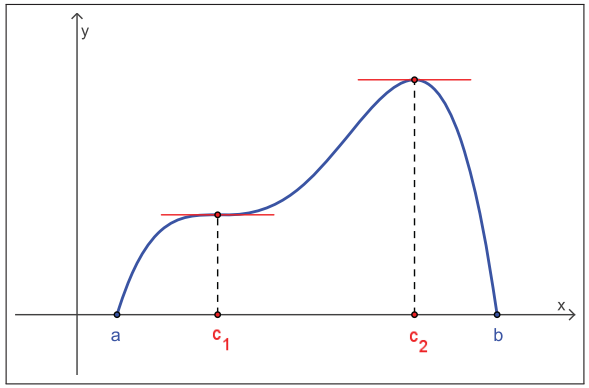


O teorema de Rolle e o teorema do valor médio

O teorema de Rolle

Teorema

Seja f uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Exemplo

Se $r > 0$ e n é um inteiro não-negativo qualquer, prove que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

Solução. Suponha, por absurdo, que $y = f(x)$ tenha duas raízes reais distintas a e b. Assim, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, segue-se pelo teorema de Rolle que existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

isto é, $f'(x) = (2\,n + 1)\,x^{2\,n} + r$ possui pelo menos uma raiz real em (a, b). Mas isto é uma contradição, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorre que

$$\underbrace{(2\,n+1)}_{>0}\,\underbrace{x^{2\,n}}_{\geq 0} + \underbrace{r}_{>0} > 0.$$

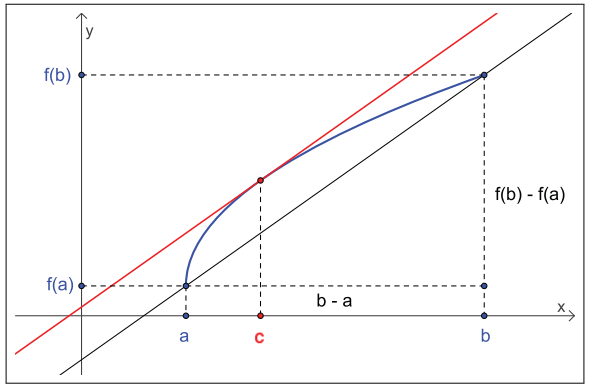
Isto mostra que $f(x) = x^{2\,n+1} + r\,x + s$ não pode ter duas raízes reais distintas.

O teorema do valor médio

Teorema

Se f é uma função derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Exemplo

Seja $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[-1, 2]$, diferenciável em $(-1, 2)$ com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2\,x$.

Solução. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (-1, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem coeficiente angular igual a 2 sendo, portanto, paralela à reta $y = 2\,x$.

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 17

Versão 0.9

A regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital

Teorema

Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis (deriváveis) e que $g'(x) \neq 0$ em uma vizinhança do ponto p. Suponha também que

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

Então

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou se ele é $-\infty$ ou $+\infty$).

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1} (x-1) = 0,$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}[x-1]} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

A regra de L'Hôpital

- A regra de L'Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite do quociente das derivadas do numerador e do denominador, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É importante verificar que as condições com respeito aos limites de f e g antes de usar a regra de L'Hôpital.
- A regra de L'Hôpital também é válida para limites laterais ou para limites no infinito, isto é, "$x \to p$" pode ser trocado por qualquer dos símbolos a seguir: $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x}.$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}\,x^{-2/3}}.$$

Note que $1/x \to 0$ e $x^{-2/3}/3 \to 0$ quando $x \to \infty$ mas, ao invés de aplicar novamente a regra de L'Hôpital, vamos simplificar a expressão e calcular o limite diretamente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}\,x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$, assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital outra vez:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}^2(x) + 2\,\sec^4(x)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty.$$

O uso da regra de L'Hôpital está errado aqui, uma vez que $1 - \cos(x) \to 2^-$ quando $x \to \pi^-$. O limite pode ser calculado diretamente:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{1 - \cos(\pi)} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0.$$

Produtos indeterminados

Produtos indeterminados

Para usar a regra de L'Hôpital para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p}[f(x)\cdot g(x)]$$

com $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), basta reescrevê-lo em

$$\lim_{x\to p}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to p}\frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to p}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to p}\frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Usando então a regra de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Observação

No exemplo anterior, também podemos reescrever o limite na forma

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Mas, ao usar a regra de L'Hôpital, obtemos um limite mais complicado do que o limite inicial:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{x(\ln(x))^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x(\ln(x))^2).$$

Diferenças indeterminadas

Diferenças indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p}[f(x)-g(x)]$$

com

$$\lim_{x\to p} f(x)=+\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p} g(x)=+\infty,$$

é necessário converter a diferença em um quociente
(usando um denominador comum ou racionalização)
ou
colocar algum fator comum em evidência.

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-}[\sec(x)-\operatorname{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\sec(x)=\infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\operatorname{tg}(x)=\infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi/2)^-}[\sec(x)-\operatorname{tg}(x)] &= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left[\frac{1}{\cos(x)}-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right]\\ &= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)}\\ &= \frac{-0}{-1} = 0.\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos a regra de L'Hôpital, o que é permitido, já que $1-\operatorname{sen}(x)\to 0$ e $\cos(x)\to 0$ quando $x\to(\pi/2)^-$.

Potências indeterminadas

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p}[f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

basta reescrevê-lo
fazendo uma mudança de base:

$$\lim_{x\to p}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{\ln\left[[f(x)]^{g(x)}\right]} = \lim_{x\to p} e^{g(x)\cdot\ln[f(x)]} = e^{\lim_{x\to p}[g(x)\cdot\ln[f(x)]]}.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]} = e^0 = 1.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}$.

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}\right]}\\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))}\\ &= e^{\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]}.\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))}{\operatorname{tg}(x)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{4\cos(4\,x)}{1+\operatorname{sen}(4\,x)}}{\sec^2(x)} = 4.\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]} = e^4$.

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 18

Versão 0.9

As funções hiperbólicas

Definições e identidades

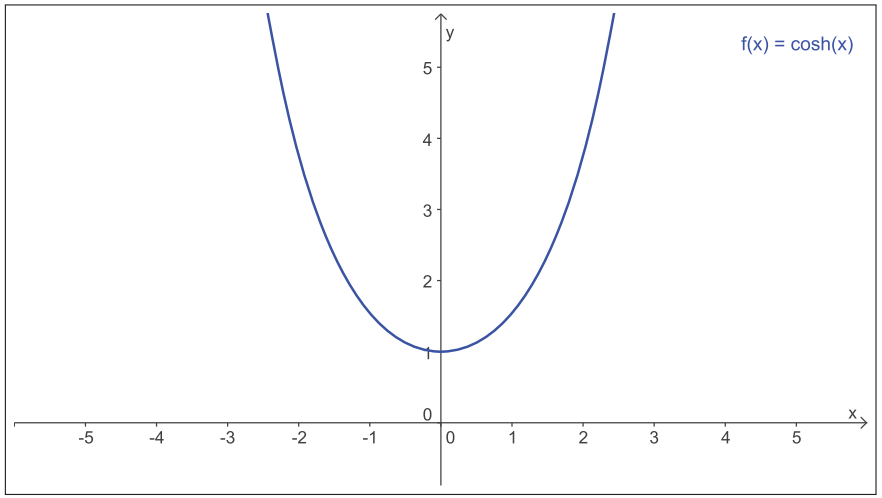
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \quad \text{e} \quad 1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x).$$

A função cosseno hiperbólico

Se $y = f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, então $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$.



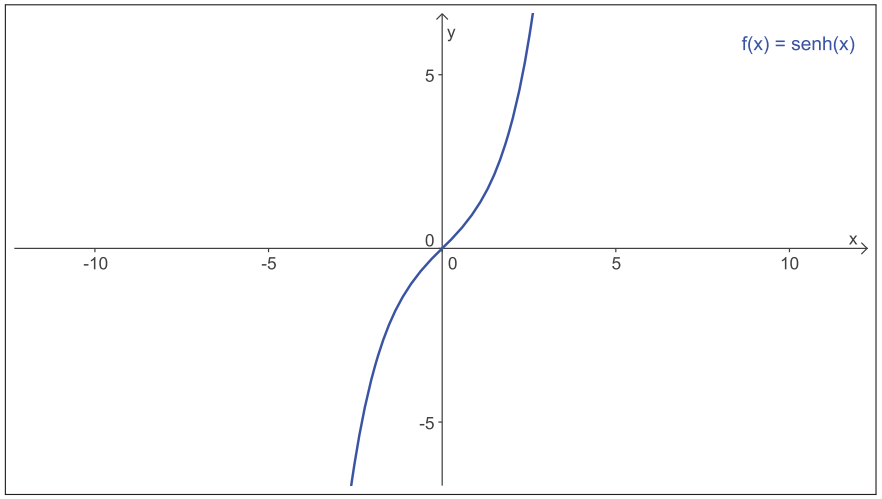
A catenária

A catenária

A catenária

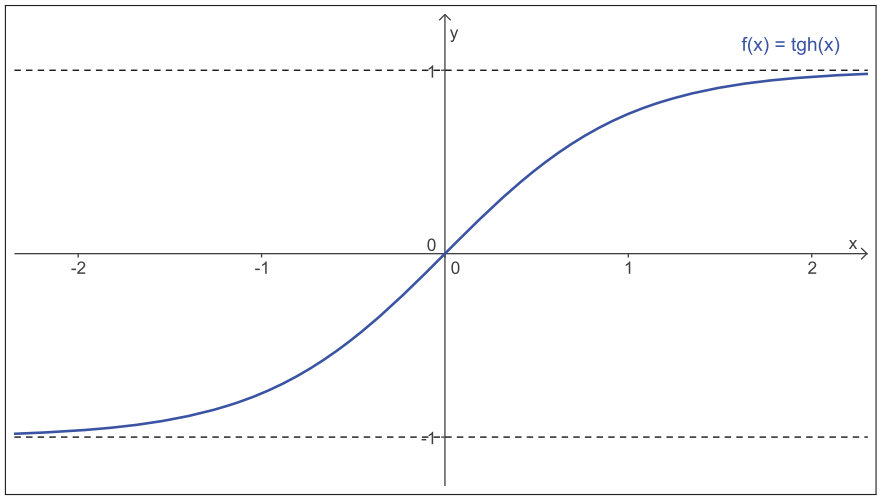
A função seno hiperbólico

Se $y = f(x) = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, então $f'(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.



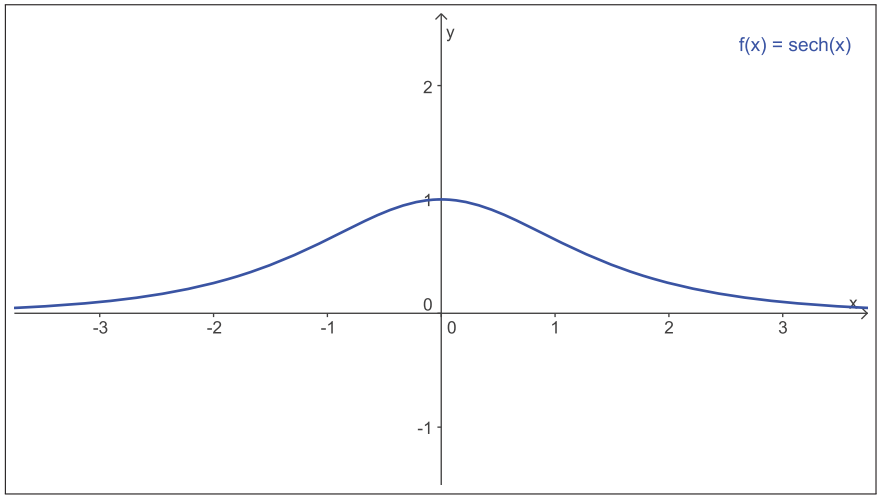
A função tangente hiperbólica

Se $y = f(x) = \operatorname{tgh}(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$, então $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.



A função secante hiperbólica

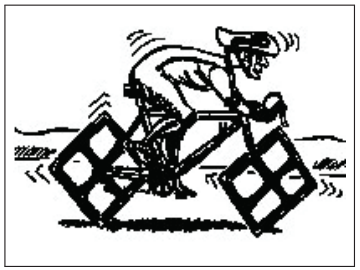
Se $y = f(x) = \operatorname{sech}(x)$, então $f'(x) = -\operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)$.



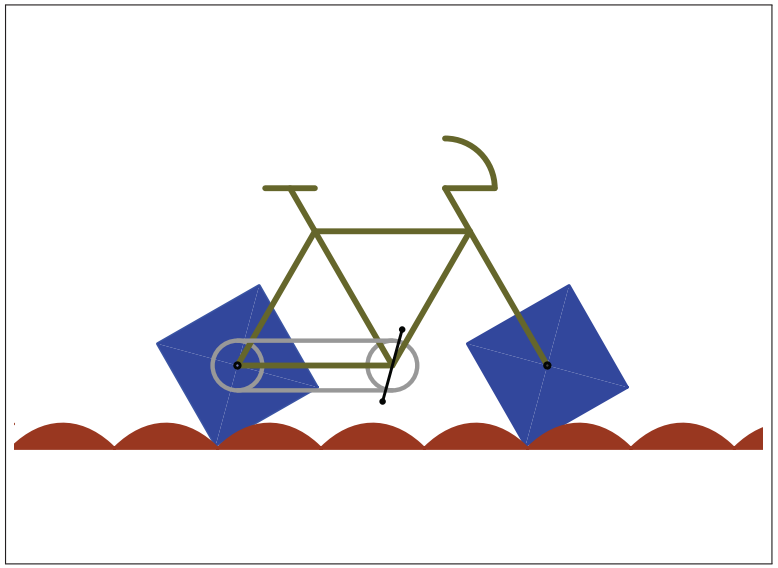
Derivadas das funções hiperbólicas

Função	Derivada
$y = \cosh(u)$	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \operatorname{senh}(u)$	$\frac{dy}{dx} = \cosh(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \operatorname{tgh}(u)$	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \operatorname{sech}(u)$	$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \operatorname{cossech}(u)$	$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cossech}(u) \cdot \operatorname{cotgh}(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = \operatorname{cotgh}(u)$	$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cossech}^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$

Bicicletas com rodas quadradas



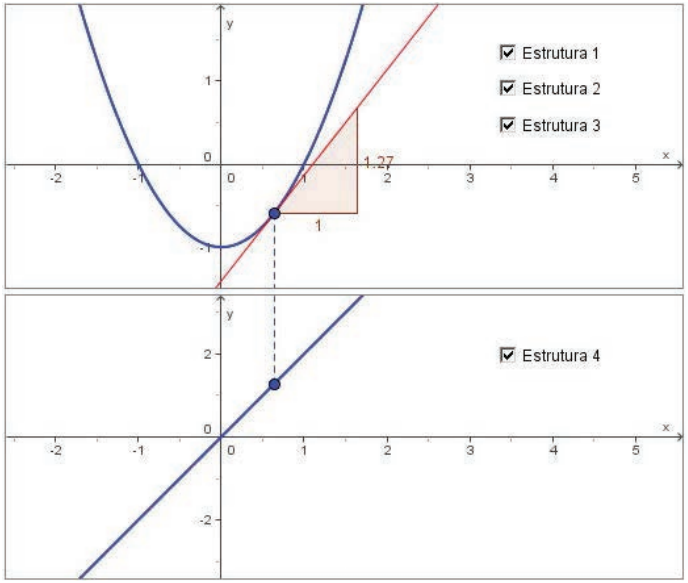
Bicicletas com rodas quadradas



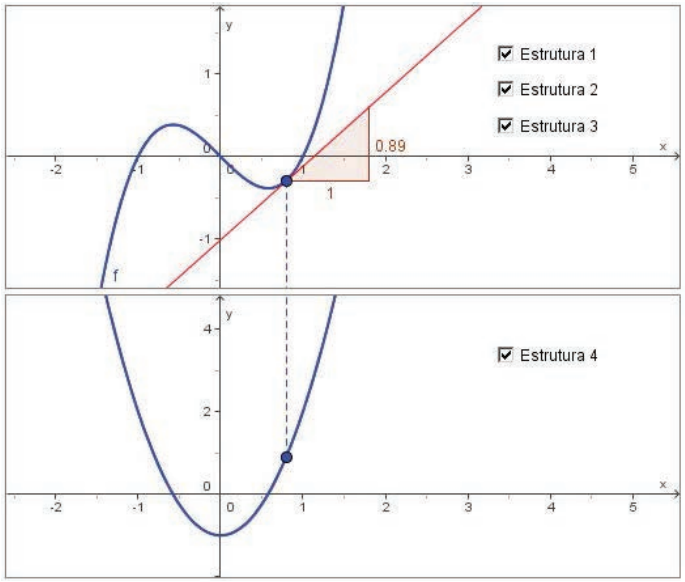
Bicicletas com rodas quadradas

Derivadas, funções crescentes e decrescentes

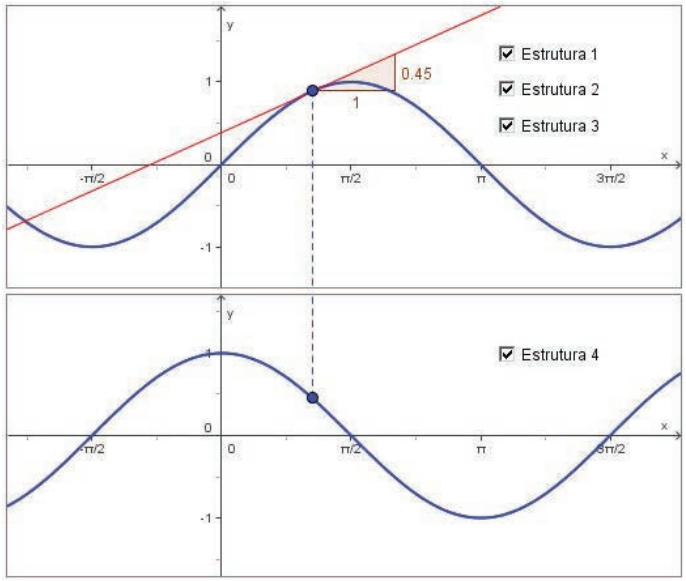
Exemplo



Exemplo



Exemplo

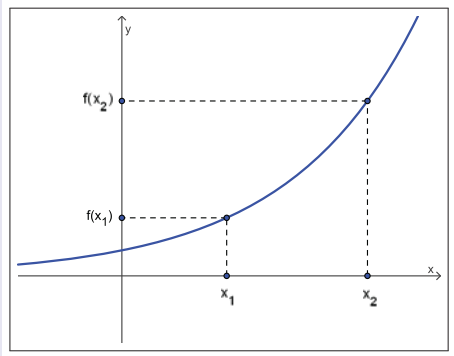


Funções crescentes e decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

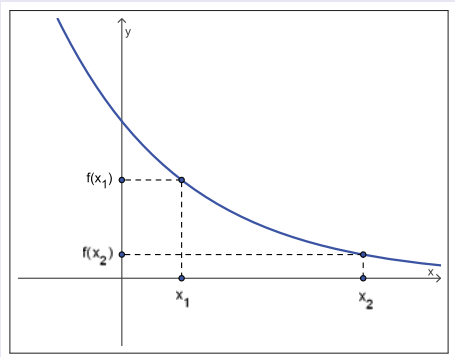


Funções crescentes e decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$



Crescimento e decrescimento em intervalos

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Demonstração: use o teorema do valor médio para derivadas!

Demonstração

Suponha que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Devemos mostrar que se f é crescente em I, isto é, devemos mostrar que se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Agora:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \overset{(*)}{=} f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

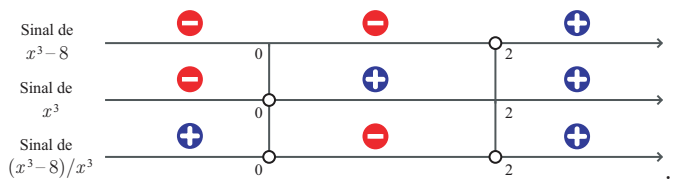
com $c \in (x_1, x_2)$. Note que em $(*)$ usamos o teorema do valor médio. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Um argumento análogo mostra que se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente em I.

Exemplo

Seja $y = f(x) = x + 4/x^2$. Calcule os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

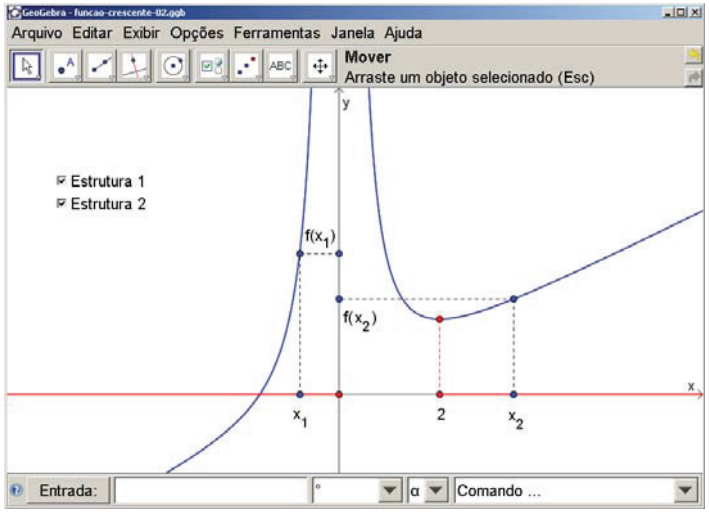
Solução. Temos que $f'(x) = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e f é crescente em $(2, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$, vemos que f é decrescente em $(0, 2)$.

Cuidado!

A função $y = f(x) = x + 4/x^2$ não é crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$!



Exemplo

Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = x^2/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x$ para todo $x > 0$.

Solução. Primeiro, defina a função auxiliar $g(x) = x - f(x)$. Agora, note que

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, g é crescente em $[0, +\infty)$. Como $g(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad g(0) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < x.$$

Resta mostrar que $0 < f(x)$ para todo $x > 0$. Como $f'(x) = x^2/(1 + x^2) > 0$ para $x > 0$, segue-se que f é crescente em $[0, +\infty)$. Logo, como $f(0) = 0$, segue-se que

$$0 < x \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(x) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x).$$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 19

Versão 0.9

Na última aula

Crescimento e decrescimento em intervalos

Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f é diferenciável em I.

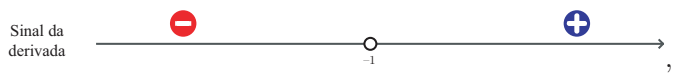
(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.

Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$. Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada:

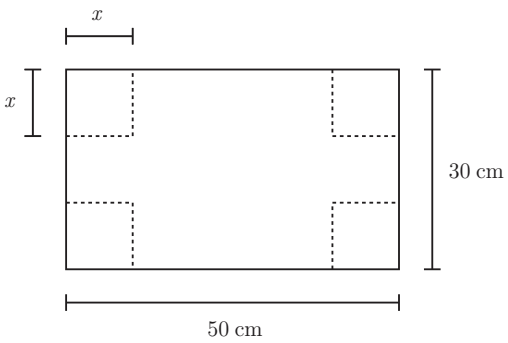


pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

Máximos e mínimos

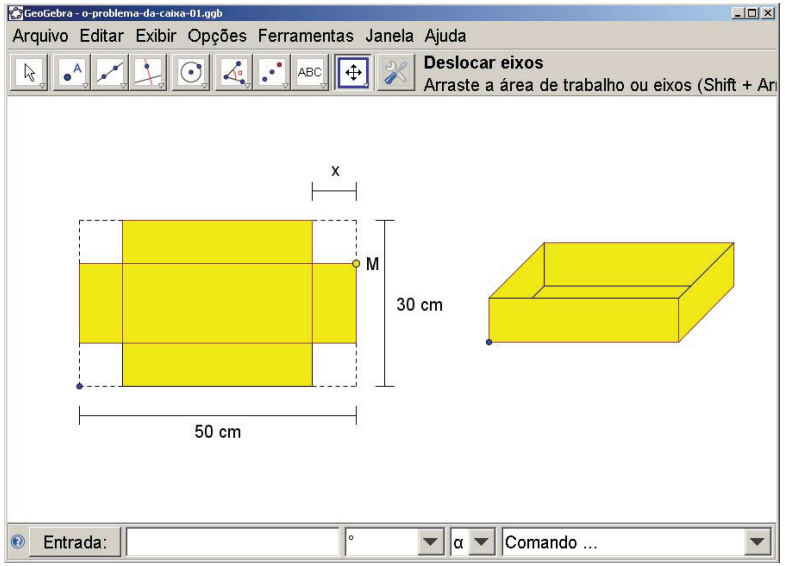
Motivação: o problema da caixa

Você foi contratado por uma empresa que fabrica caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de um folha retangular de papelão medindo 30 cm $\times$ 50 cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão.



Dependendo do valor de x, diferentes caixas (com diferentes volumes) podem ser confeccionadas. O problema é determinar o valor de x a fim de que a caixa correspondente tenha o maior volume possível.

Motivação: o problema da caixa



Extremos globais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Extremos locais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

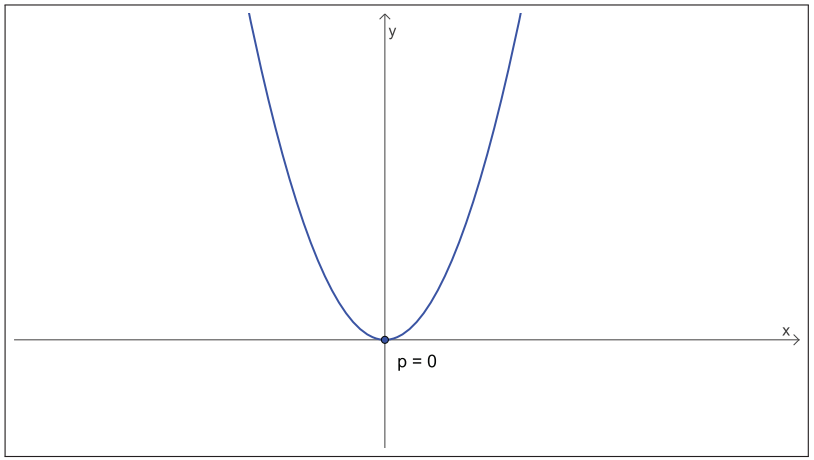
$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é um ponto de mínimo global de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$, pois

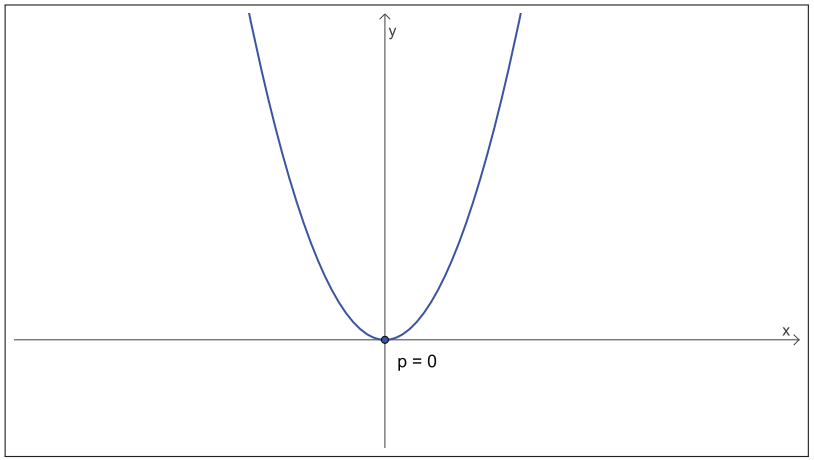
$$f(p) = f(0) = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in A.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$y = f(x) = x^2$ não possui pontos de máximo global em $A = \mathbb{R}$, pois

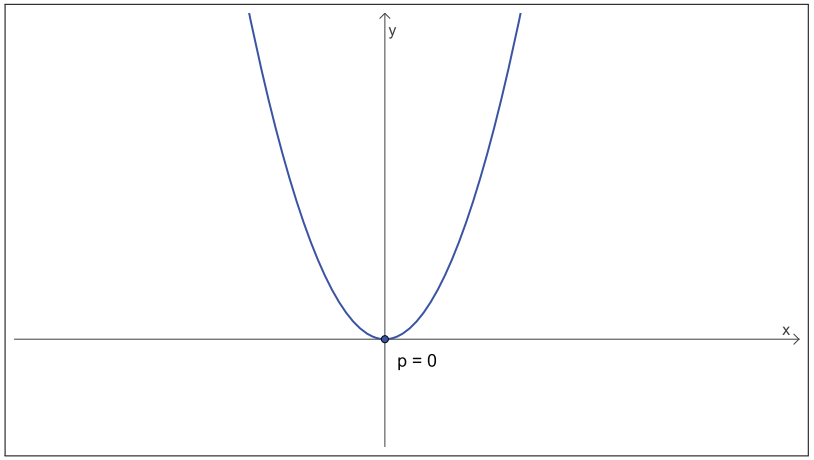
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é o único extremo local de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$.

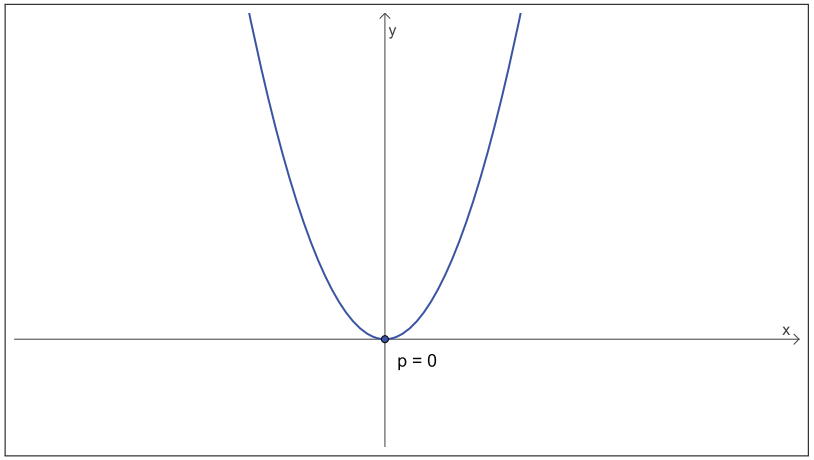
Ele é um ponto de mínimo local de f em $A = \mathbb{R}$.



Exemplo: $y = f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$p = 0$ é o único extremo local de $y = f(x) = x^2$ em $A = \mathbb{R}$.

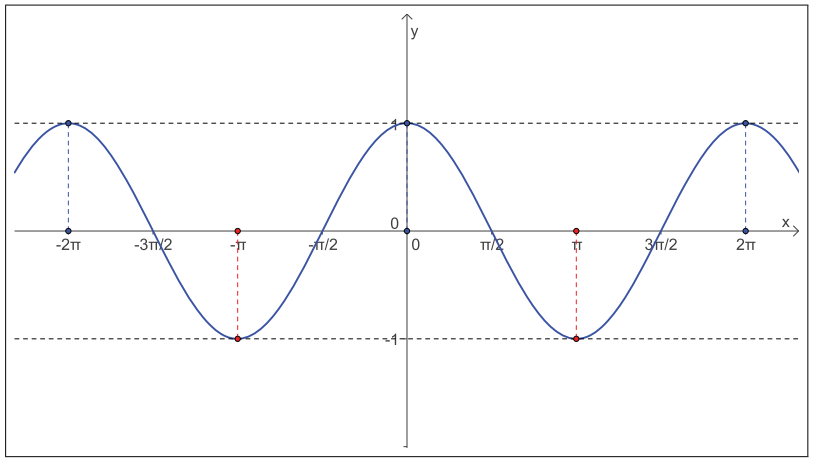
Todo extremo global também é um extremo local!



Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

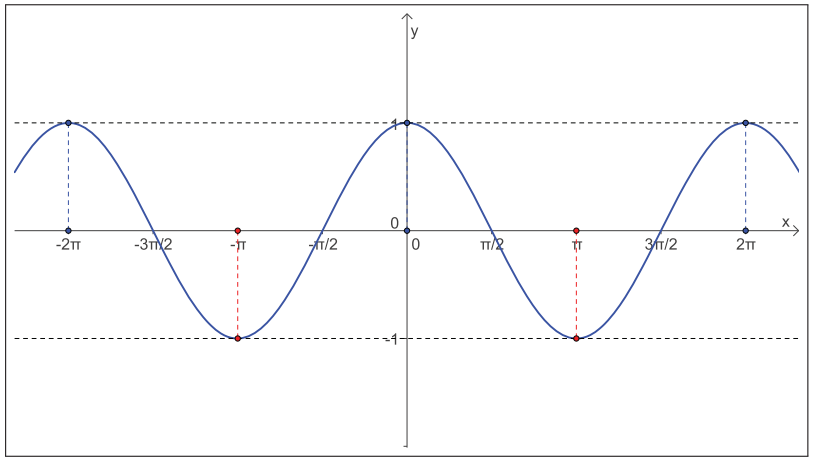
Todos os pontos da forma $p = \pi + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de mínimo global de $y = f(x) = \cos(x)$ em $A = \mathbb{R}$, pois

$$f(p) = f(\pi + 2\,k\,\pi) = -1 \leq \cos(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$



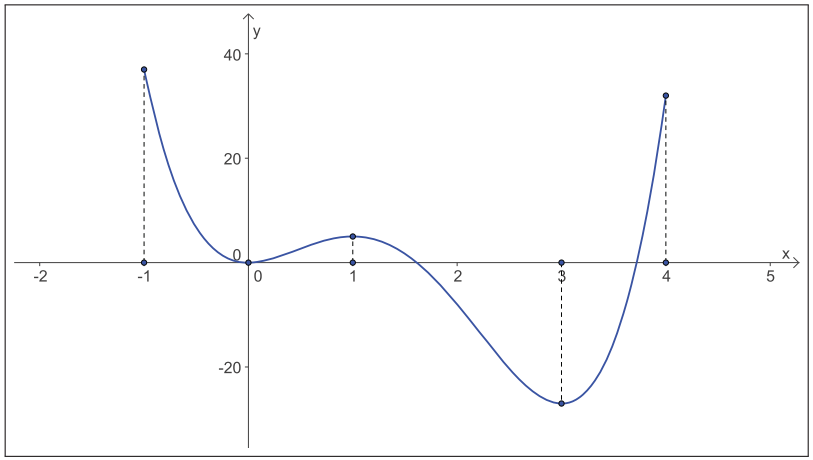
Exemplo: $y = f(x) = \cos(x)$, $A = \mathbb{R}$

Não existem extremos locais que não sejam extremos globais.



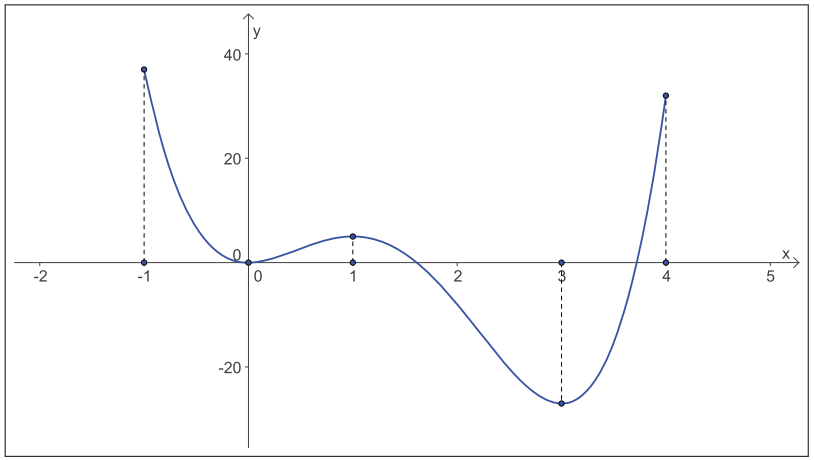
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de máximo global de f em A é $p = -1$.



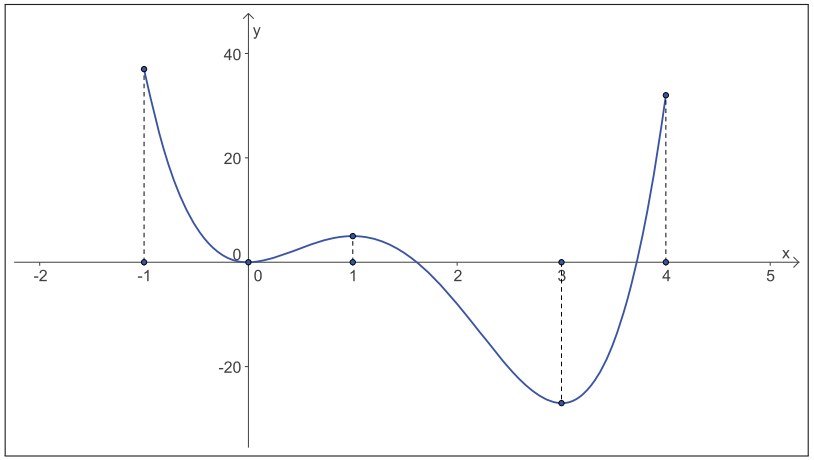
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo global de f em A é $p = 3$.



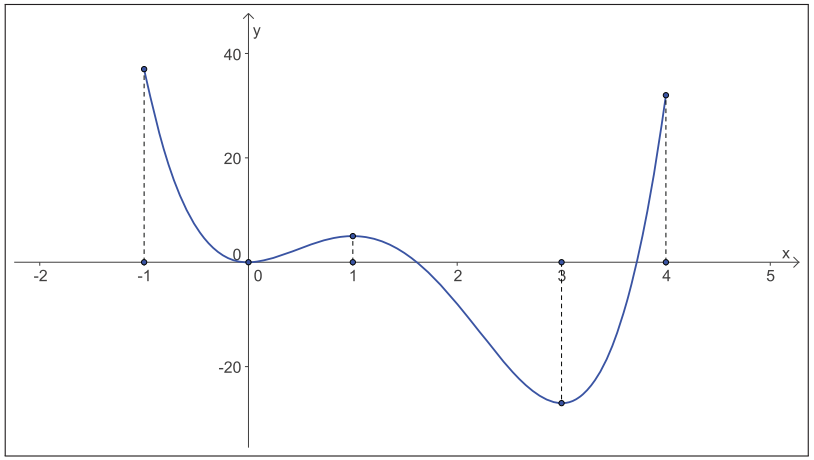
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$ e $q = 4$.



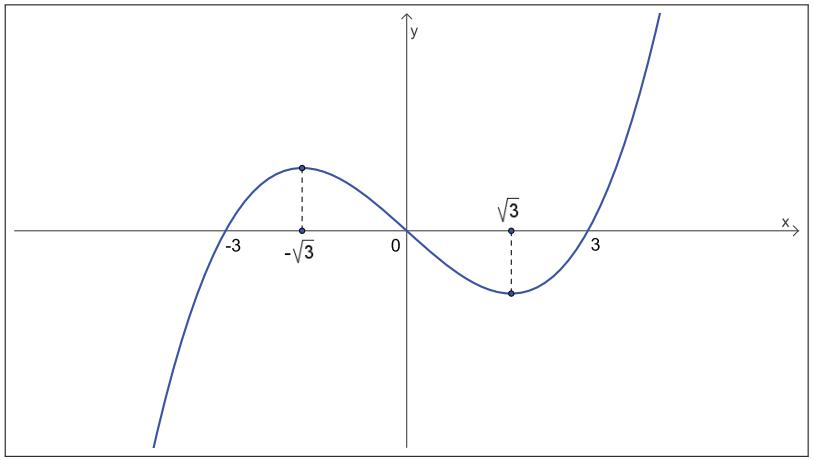
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo local de f em A que não é global é $p = 0$.



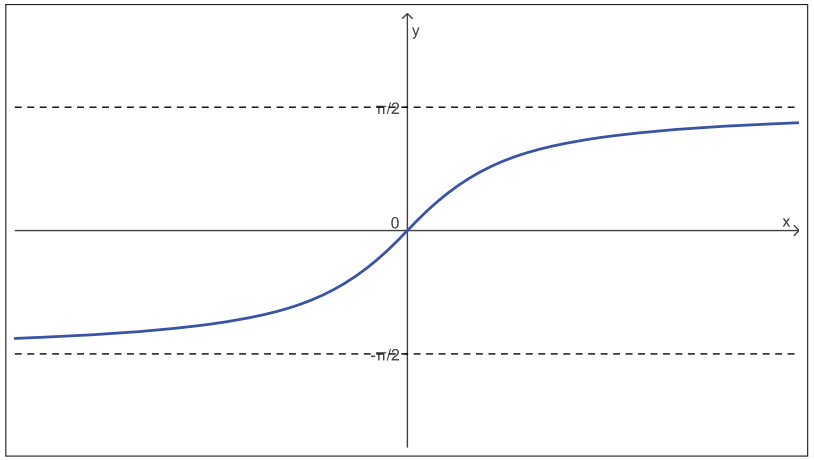
Exemplo: $y = f(x) = x\,(x-3)\,(x+3)$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A: $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A.



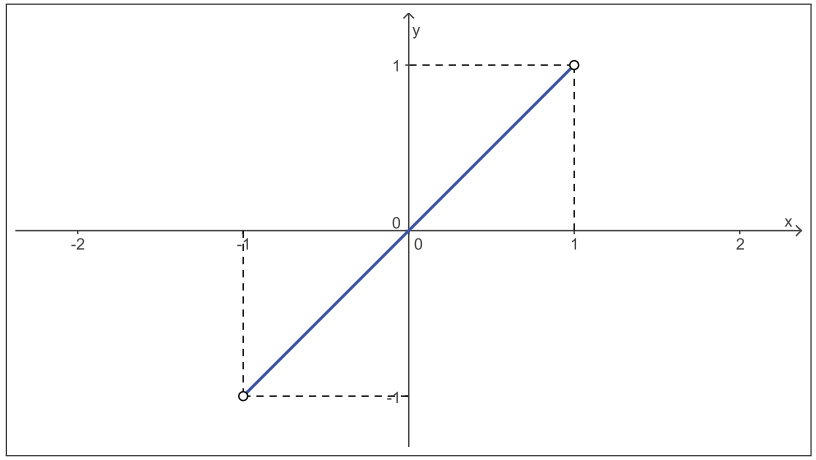
Exemplo: $y = f(x) = \mathrm{arctg}(x)$, $A = \mathbb{R}$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



Exemplo: $y = f(x) = x$, $A = (-1, +1)$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



Quando é possível garantir a existência de extremos globais?

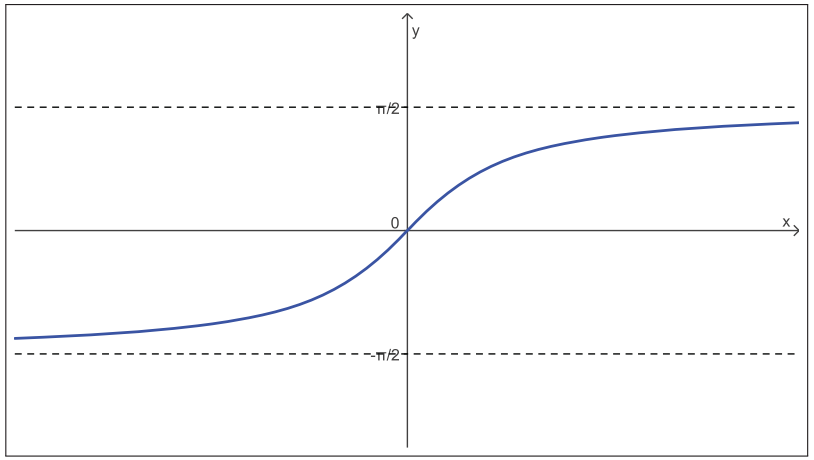
O Teorema de Weierstrass

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$ uma função e A um subconjunto do domínio D. Se $A = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado e f é contínua em A, então f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em A.

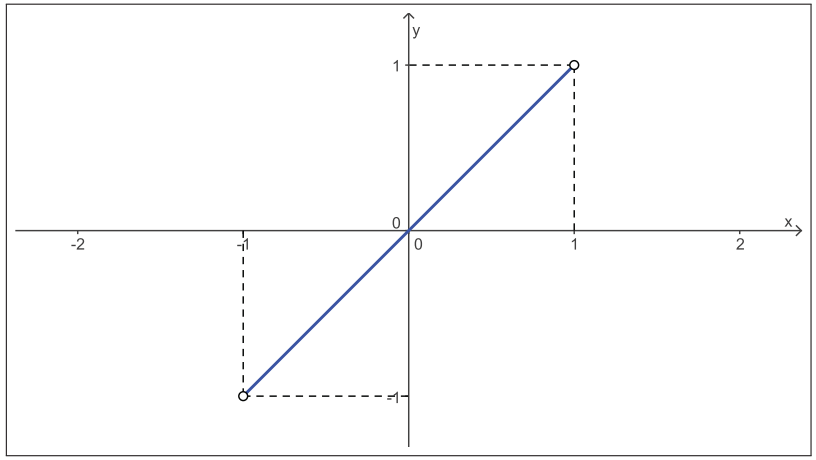
Cuidado!

No teorema de Weierstrass é importante que A seja um intervalo limitado!



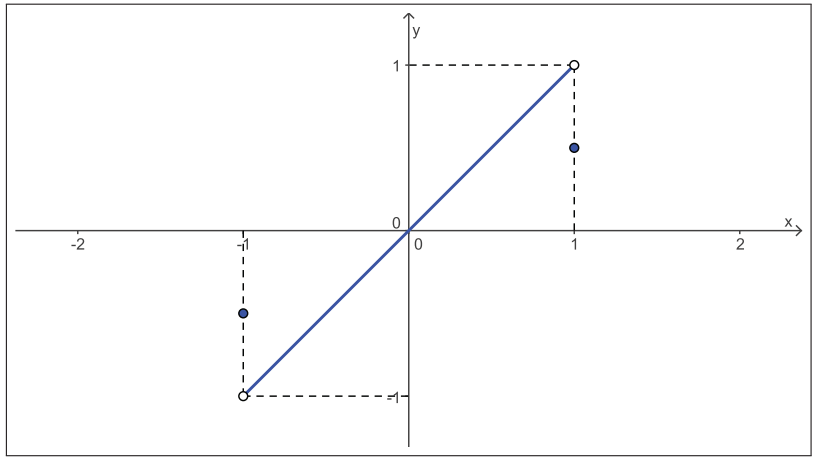
Cuidado!

No teorema de Weierstrass é importante que A seja um intervalo fechado!



Cuidado!

No teorema de Weierstrass é importante que f seja uma função contínua!



Como calcular os extremos de uma função?

A regra de Fermat

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$ e A um subconjunto do domínio D. Se p é um extremo local de f em A, f é diferenciável em p e p é ponto interior de A, então p é um ponto crítico de f, isto é,

$$f'(p) = 0.$$

Situação ideal

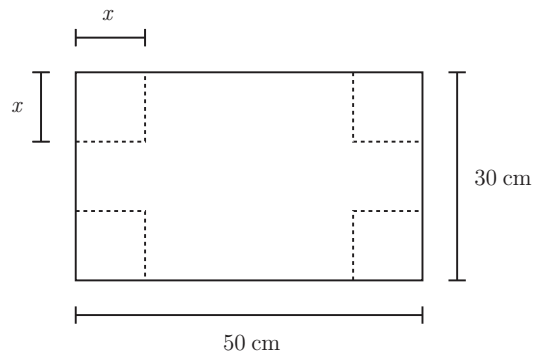
Se $A = [a, b]$ e f é contínua em $A = [a, b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, f possui extremos globais em $A = [a, b]$.

Se um extremo global está no interior de A, isto é, se um extremo está no intervalo aberto (a, b) e se f é diferenciável em (a, b), então, pela regra de Fermat, este extremo deve ser um ponto crítico de f, isto é, ele deve anular a derivada de f.

Nesta situação ideal, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos de f em (a, b), o ponto a e o ponto b. Para saber quem é ponto de máximo global e quem é ponto de mínimo global, basta avaliar a função f nos candidatos.

O problema da caixa se enquadra nesta situação ideal. Vamos resolvê-lo!

O problema da caixa



Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$.

O problema da caixa

Solução. Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $A = [0, 15]$. Note que f é contínua e $A = [0, 15]$ é um intervalo fechado e limitado. Pela teorema de Weierstrass, f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em $A = [0, 15]$. Certamente, os pontos de máximo global são diferentes de 0 e são diferentes de 15. Assim, os pontos de máximo global estão no intervalo aberto $(0, 15)$. Como f é diferenciável em $(0, 15)$, segue-se pela regra de Fermat que os pontos de máximo global de f em A são os pontos críticos de f no intervalo $(0, 15)$. Como

$$f'(x) = 1500 - 320\,x + 12\,x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3},$$

os candidatos a pontos de máximo global são

$$x_1 = \frac{40 - 5\sqrt{19}}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{40 + 5\sqrt{19}}{3}.$$

Como $x_2 > 15$, vemos que o ponto de máximo global é $x_1 = (40 - 5\sqrt{19})/3 = 6.06850175\ldots$ cm. O volume máximo correspondente é dado por $f(x_1) = 4104.41036767\ldots$ cm^3.

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 20

Versão 0.9

Na última aula

O Teorema de Weierstrass

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$ uma função e A um subconjunto do domínio D. Se $A = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado e f é contínua em A, então f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em A.

A regra de Fermat

Teorema

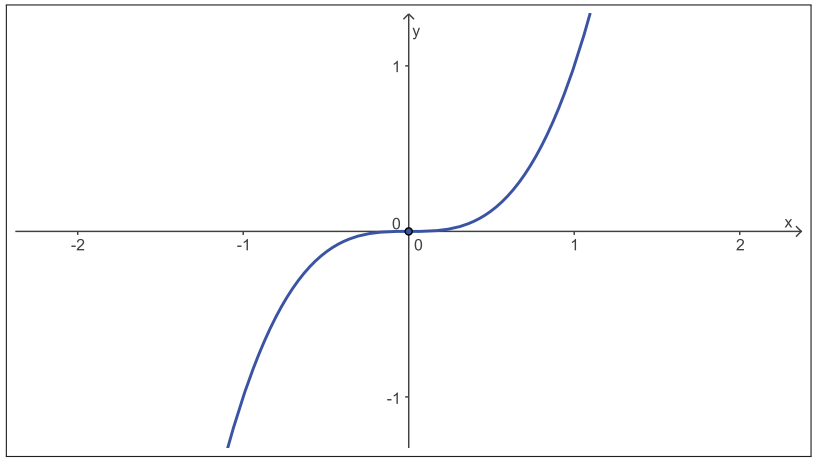
Sejam $f\colon D \to C$ e A um subconjunto do domínio D. Se p é um extremo local de f em A, f é diferenciável em p e p é ponto interior de A, então p é um ponto crítico de f, isto é,

$$f'(p) = 0.$$

Classificando pontos críticos

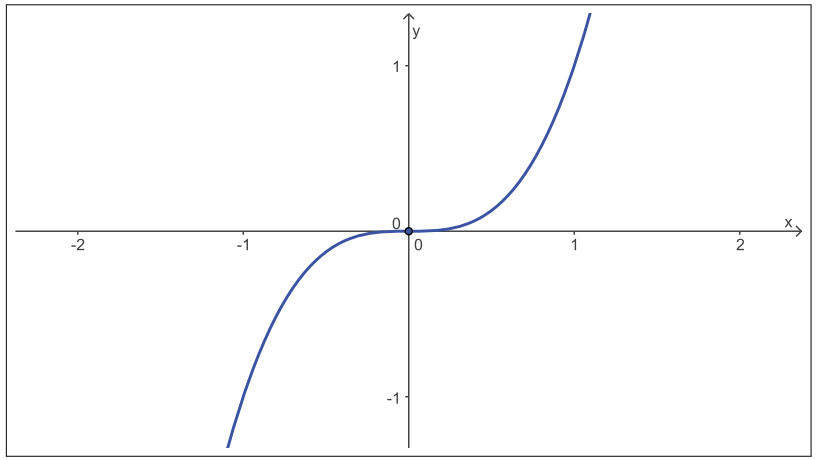
Cuidado!

A recíproca da regra de Fermat é falsa!
Nem todo ponto crítico de uma função é extremo local da função.



Cuidado!

$p = 0$ é ponto crítico de $y = f(x) = x^3$ (pois $f'(p) = f'(0) = 0$),
mas $p = 0$ não é um extremo local de f em $A = \mathbb{R}$.



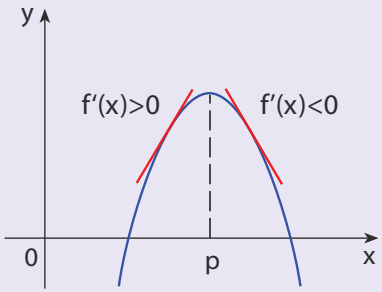
Precisamos de um classificador de pontos críticos!

O teste da derivada primeira

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A.

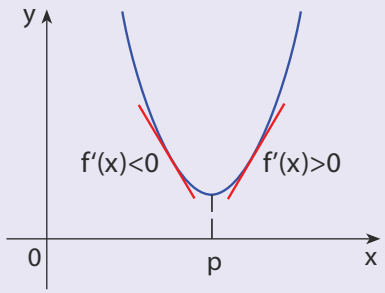
(1) Se $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p, então p é ponto de máximo local de f em A.



O teste da derivada primeira

Teorema

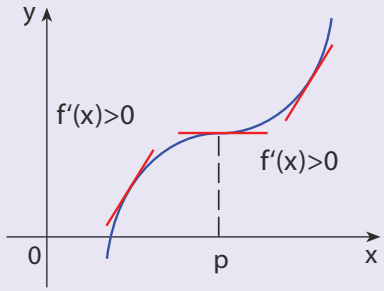
(2) Se $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p, então p é ponto de mínimo local de f em A.



O teste da derivada primeira

Teorema

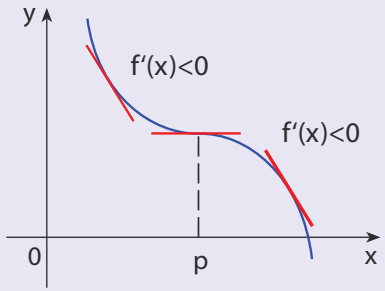
(3) Se $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p, então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A. Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A.



O teste da derivada primeira

Teorema

(4) Se $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p, então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A. Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A.



Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

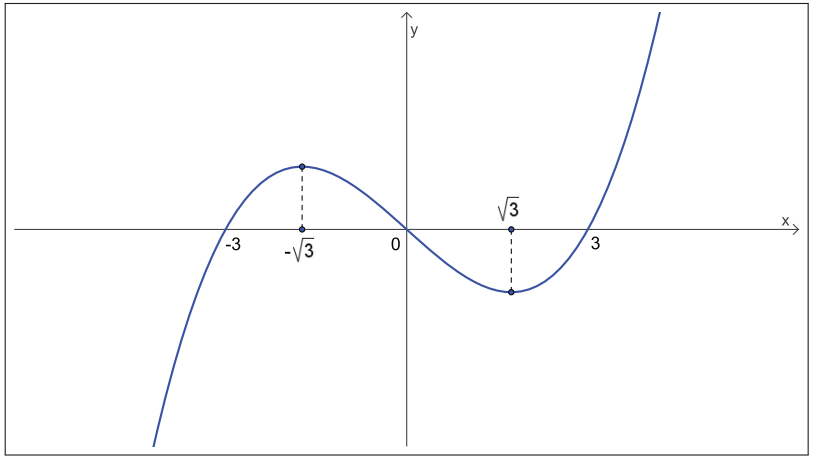
Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de $+$ para $-$, segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Como, no ponto crítico $p = +\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, segue-se que $p = +\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$. Note que estes extremos não são globais, pois

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

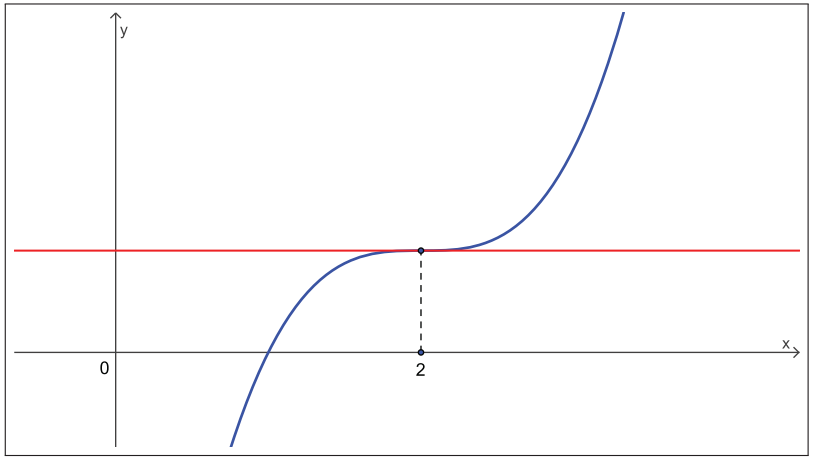
Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 9\,x$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A: $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A.



Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 7$, $A = \mathbb{R}$

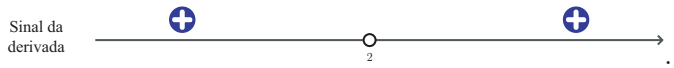
A função f não possui apenas extremos locais nem extremos globais em A. O ponto crítico $p = 2$ é um ponto de sela de f.



Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 12\,x + 12 = 3\,(x-2)^2$. Vamos estudar o sinal da derivada:

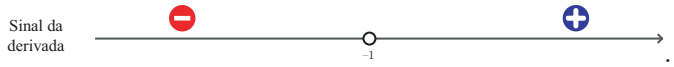


Como, no ponto crítico $p = 2$, o sinal da derivada não muda, segue-se que $p = 2$ é um ponto de sela de f em $\mathbb{R}$.

Exercício

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Também já estudamos o sinal da derivada de f:



Assim, $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Como, no ponto crítico $p = -1$, o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

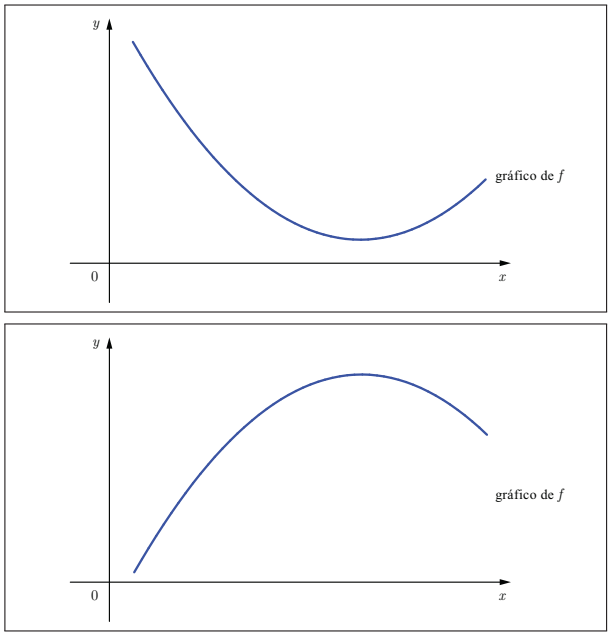
Universidade Federal Fluminense

Parte 21

Versão 0.9

Convexidade, concavidade e pontos de inflexão

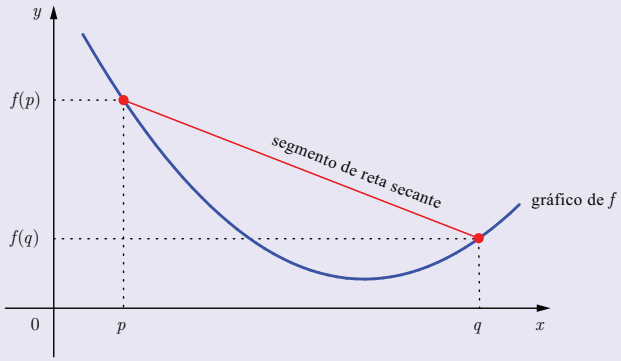
O que estas funções têm de diferente?



Convexidade (concavidade para cima)

Definição

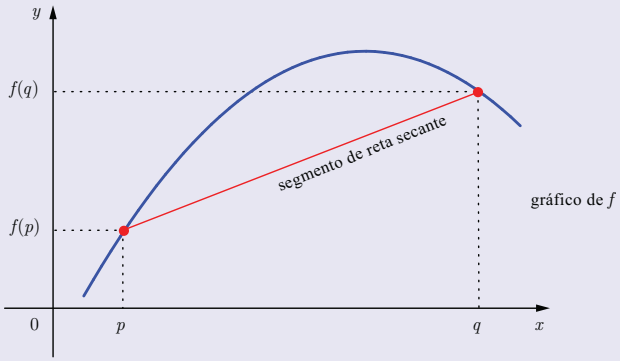
Dizemos que uma função f definida em um intervalo I é convexa (ou côncava para cima), se o segmento de reta secante que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ sempre está *acima* ou *coincide* com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos p e q em I.



Concavidade (concavidade para baixo)

Definição

Dizemos que uma função f definida em um intervalo I é côncava (ou côncava para baixo), se o segmento de reta secante que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ sempre está *abaixo* ou *coincide* com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos p e q em I.



Convexidade e concavidade em intervalos

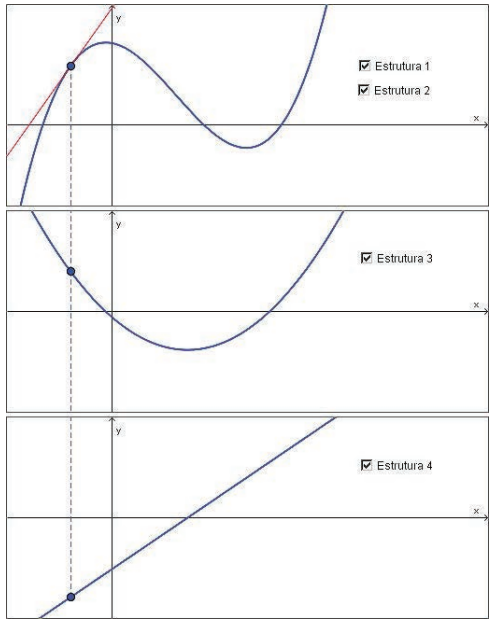
Teorema

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas em I.

(1) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para cima no intervalo I.

(2) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava para baixo no intervalo I.

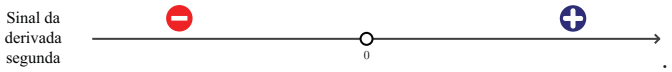
Justificativa



Exemplo

Seja $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

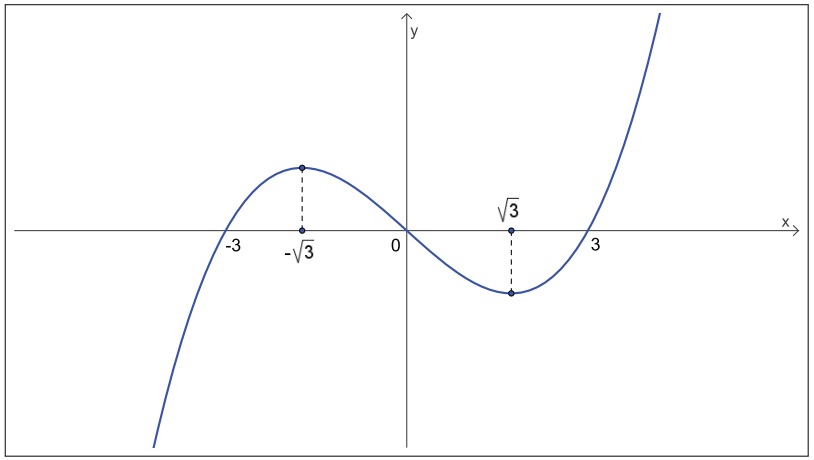
Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

Estudo da concavidade da função $y = f(x) = x^3 - 9\,x$

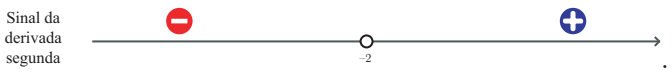
$p = 0$ é o único ponto de inflexão de f.



Exercício

Seja $y = f(x) = x\,e^x$.
Determine os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e os pontos de inflexão de f (os pontos no domínio de f onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Logo, $f''(x) = e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x$. Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Conseqüentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Classificando pontos críticos usando a derivada segunda

O teste da derivada segunda

Teorema

Sejam $f\colon D \to C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas.

(1) Se $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local de f em A.

(2) Se $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local de f em A.

Exemplo

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9\,x$.

Solução. Temos que $f'(x) = 3\,x^2 - 9 = 3\,(x^2 - 3)$ e, portanto, $f''(x) = 6\,x$. Vimos que $p = -\sqrt{3}$ e $q = +\sqrt{3}$ são os únicos pontos críticos de f. Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

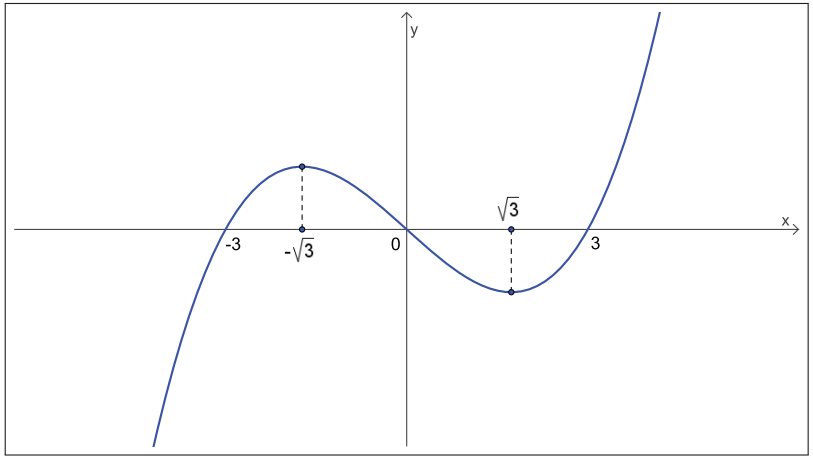
segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 9\,x$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A: $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A.



Exercício

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de $y = f(x) = x\,e^x$.

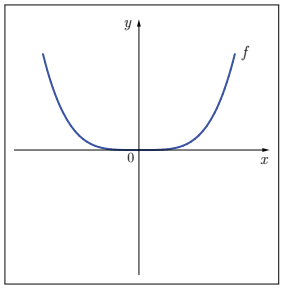
Solução. Já vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f. Também já vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$. Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1+2)\,e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

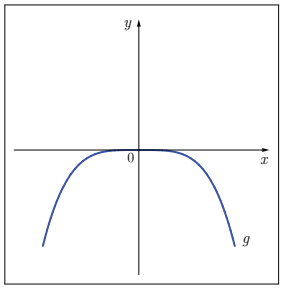
segue-se que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

Cuidado!

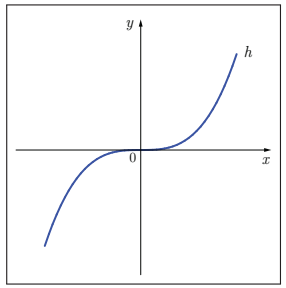
Se $f''(p) = 0$, nada podemos afirmar sobre o ponto p: ele pode ser um ponto de mínimo local, um ponto de máximo local ou um ponto de sela.



$f(x) = +x^4$



$g(x) = -x^4$



$h(x) = +x^3$

Como fazer um bom esboço do gráfico de uma função?

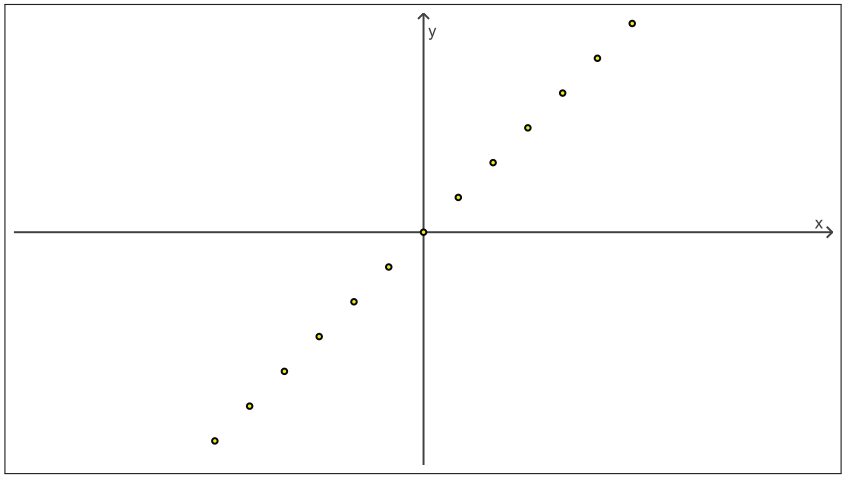
Exercício

Tente fazer um esboço do gráfico da função

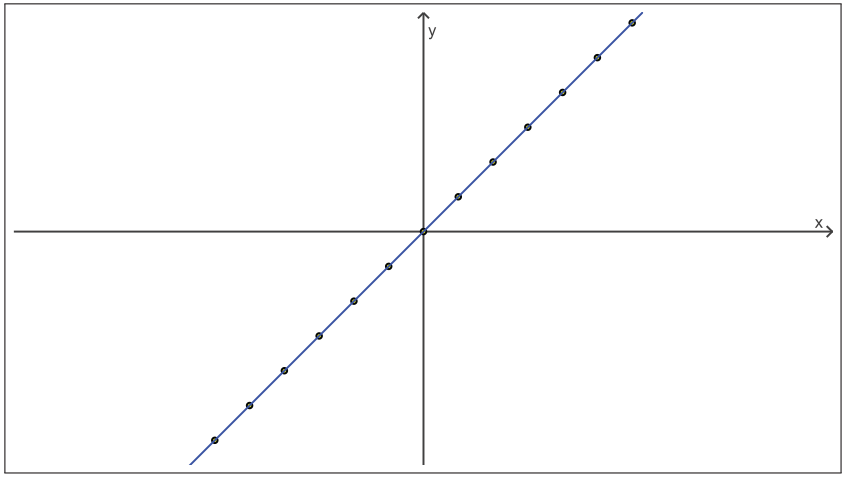
$$y = f(x) = x\,e^{x}.$$

Faça cada gráfico em um sistema de eixos coordenados diferente.
Use o que quiser, inclusive a sua calculadora!

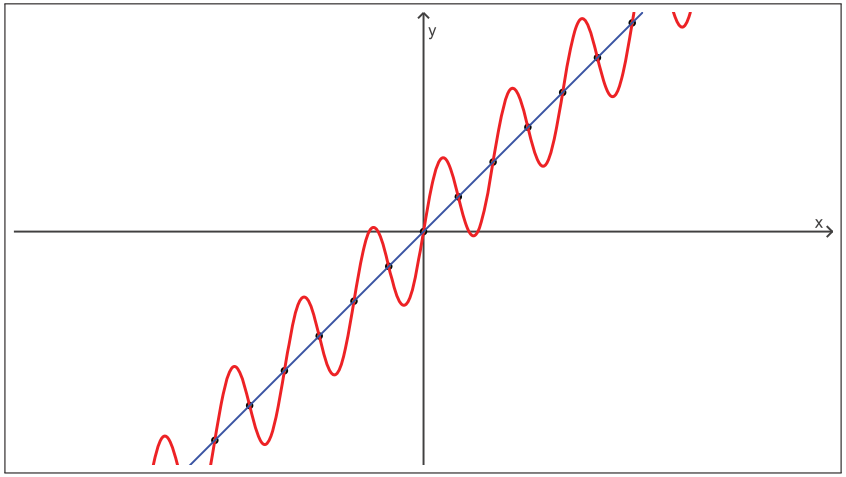
Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

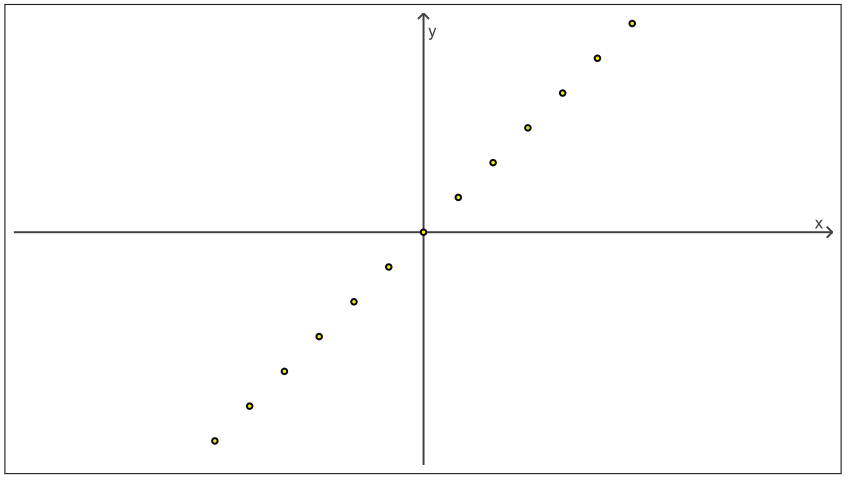
Universidade Federal Fluminense

Parte 22

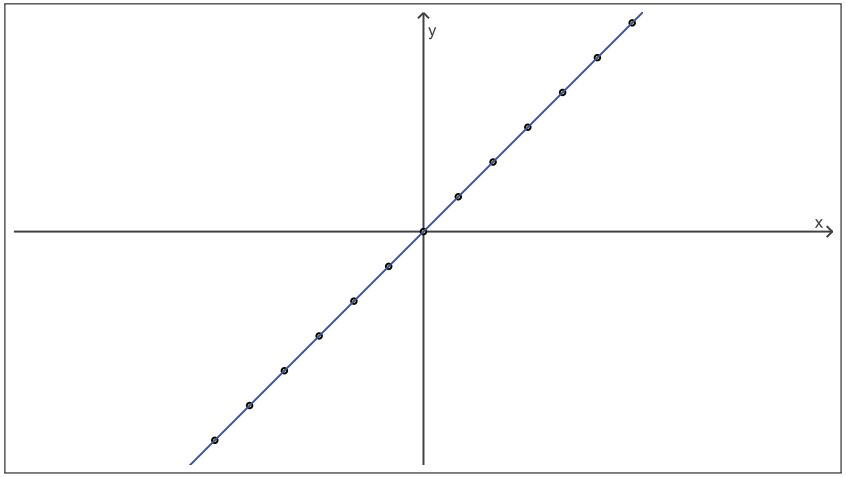
Versão 0.9

Como fazer um bom esboço do gráfico de uma função?

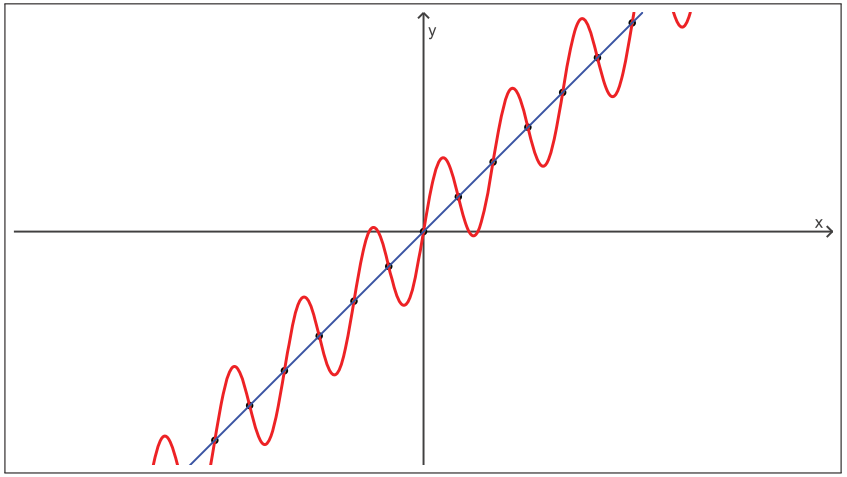
Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Usando cálculo para fazer esboços de gráficos de funções

Roteiro

(1) Domínio da função.

(2) Interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

(3) Simetrias: função par, função ímpar, função periódica.

(4) Assíntotas horizontais e verticais.

(5) Pontos onde a função não é derivável.

(6) Intervalos de crescimento e decrescimento.

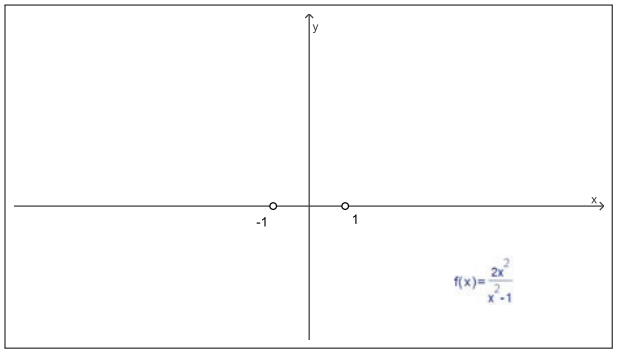
(7) Máximos e mínimos locais.

(8) Concavidade e pontos de inflexão.

Exemplo

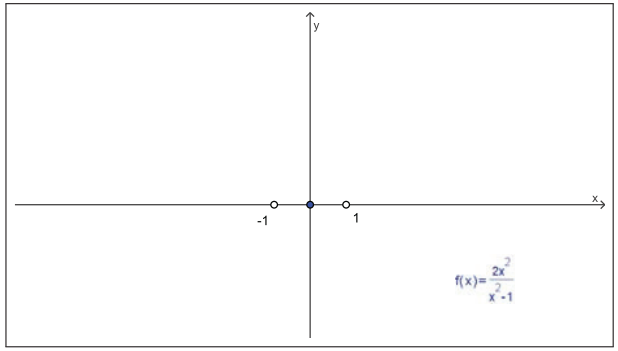
$$y = f(x) = \frac{2\,x^2}{x^2 - 1}$$

(1) Domínio da função



O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

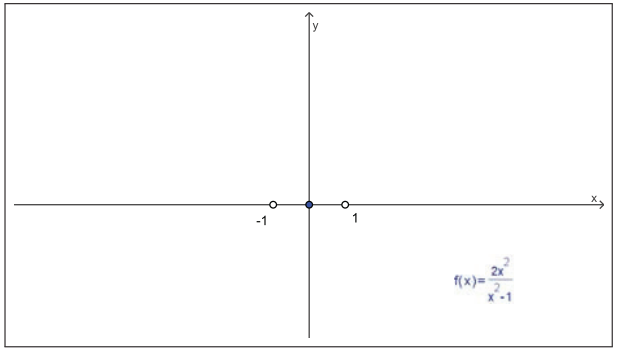


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

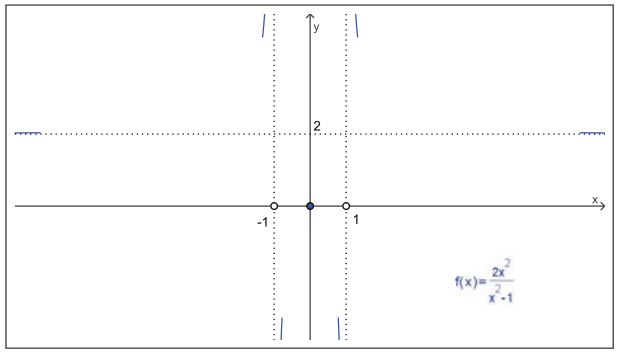
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também no ponto $(0, 0)$.

(3) Simetrias



Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1} = f(x), \forall x \in D$, concluímos que a função f é par. Logo, o seu gráfico é simétrico com relação ao eixo y. A função f não é ímpar, pois $f(-2) = 8/3 \neq -8/3 = -f(2)$.

(4) Assíntotas

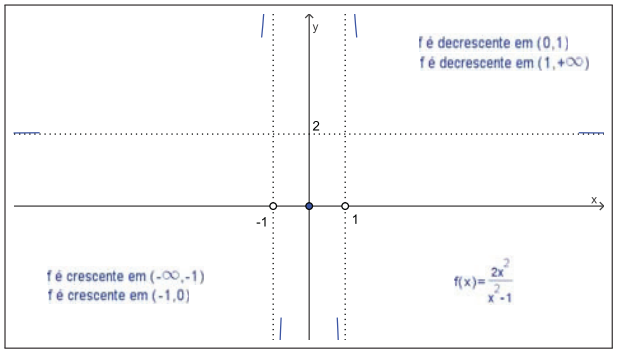


Como o denominador da função é zero quando $x = -1$ ou $x = 1$, as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

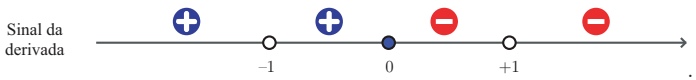
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

concluímos que, de fato, as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.

(6) Crescimento e decrescimento

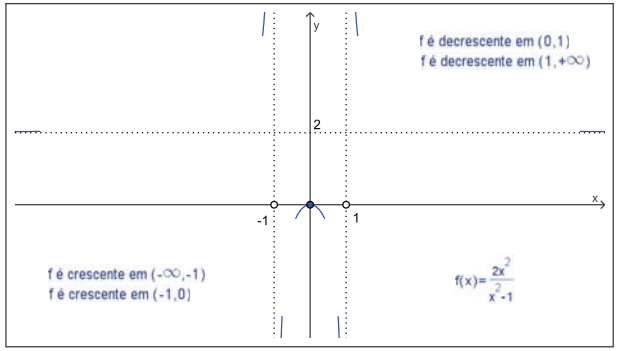


Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x)(x^2 - 1) - (2\,x^2)(2\,x)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2 - 1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá



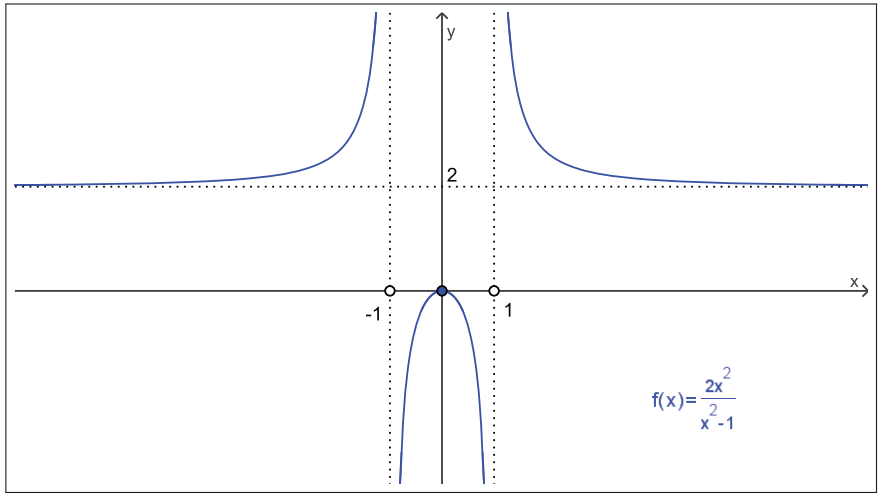
Assim, f é crescente em $(-\infty, -1)$, f é crescente em $(-1, 0)$, f é decrescente em $(0, 1)$ e f é decrescente em $(1, +\infty)$.

(6) Máximos e mínimos locais

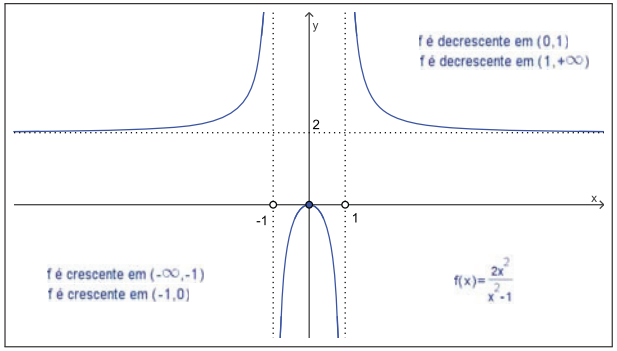


Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 0$. Como, em $p = 0$, o sinal da derivada muda de $+$ para $-$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = 0$ é ponto de máximo local de f em D.

Pronto!



(8) Concavidade e pontos de inflexão



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2 + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de $x^2 - 1$. Assim,

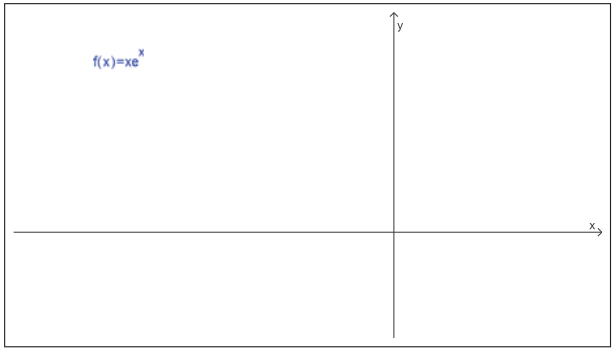
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Consequentemente, f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$, f é côncava para baixo em $(-1, 1)$ e f é côncava para cima em $(1, +\infty)$.

Exercício

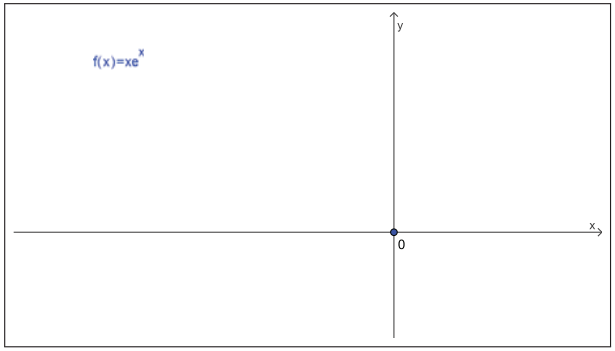
Seguindo o roteiro, faça um esboço do gráfico de $y = f(x) = x\,e^x$.

(1) Domínio da função



O domínio de f é $D = \mathbb{R}$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

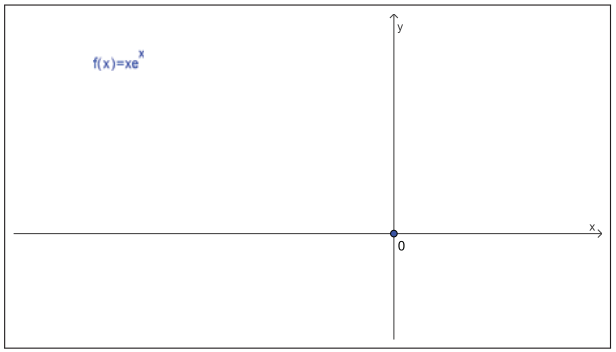


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

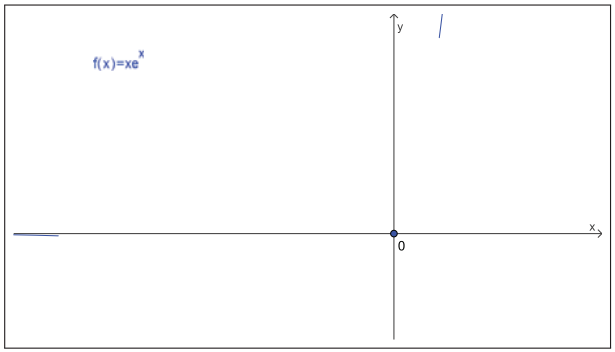
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também no ponto $(0, 0)$.

(3) Simetrias



A função f não é par, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq e^1 = f(1)$. A função f não é ímpar, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq -e^1 = -f(1)$.

(4) Assíntotas

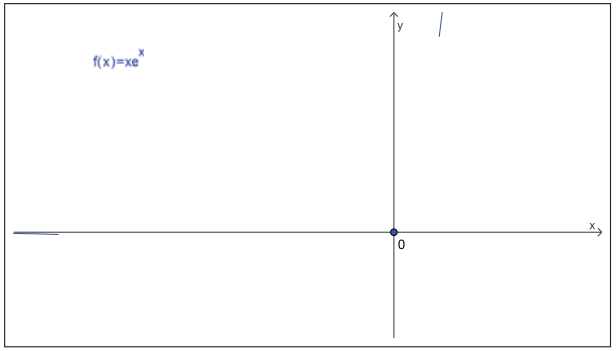


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

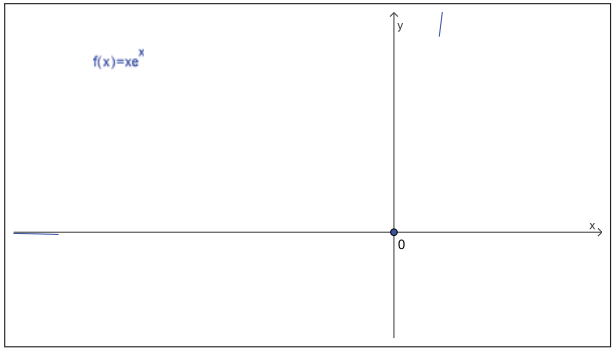
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\,e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Observe também que, $\lim_{x\to+\infty}(x\,e^x) = +\infty$. A função f não possui assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

(5) Pontos onde a função não é derivável

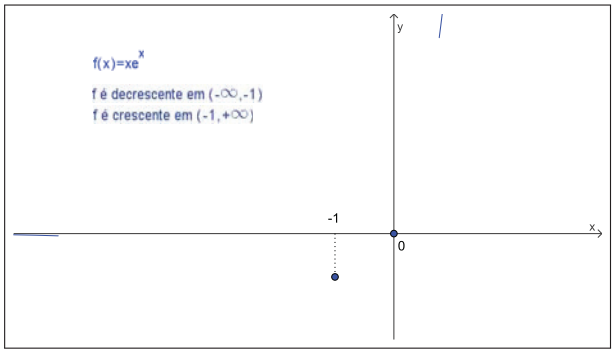


(5) Pontos onde a função não é derivável



A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis. Logo, o gráfico de f não possui "bicos" e nem pontos onde a reta tangente é vertical.

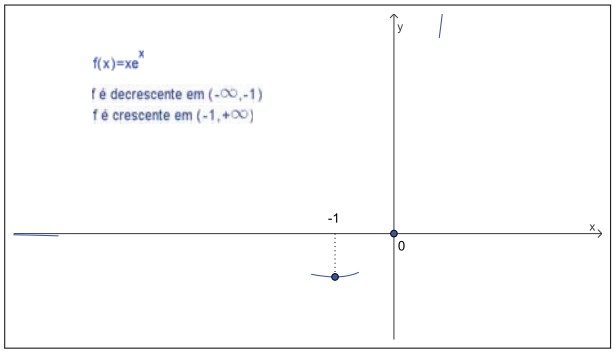
(5) Crescimento e decrescimento

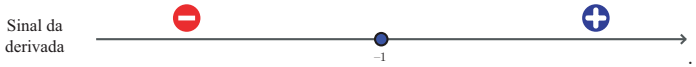


Na aula passada vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada de f:

Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

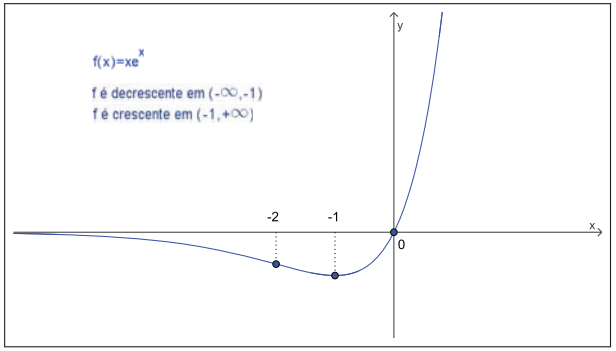
(7) Máximos e mínimos locais





Na última aula vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f e que, pelo teste da derivada primeira, $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

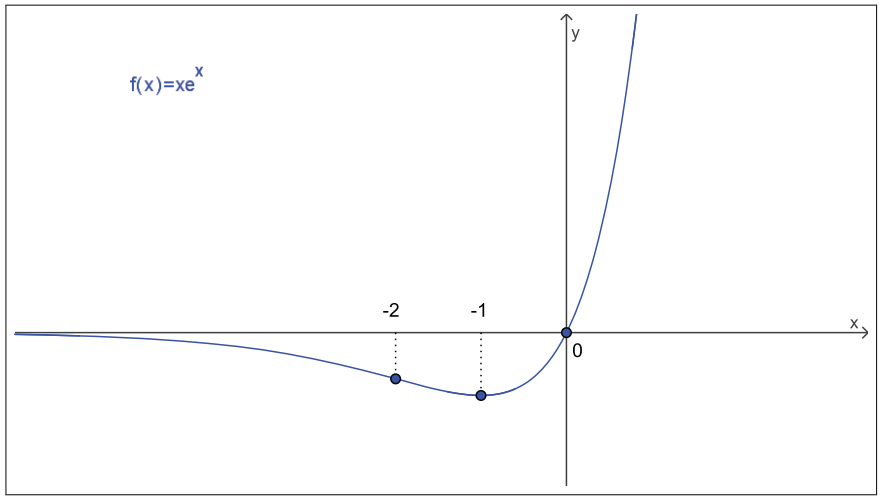
(8) Concavidade e pontos de inflexão



Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada segunda de f:

Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Consequentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Pronto!



Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 23

Versão 0.9

Integrais indefinidas

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com C uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

Mais geralmente . . .

Escrevemos $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ se $\displaystyle\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

Exemplo

Se $k \neq -1$, então $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$.

Cuidado!

Se $k = -1$, então $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$.

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(x) + C\Big] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\ln(-x) + C\Big] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\displaystyle\frac{d}{dx}\Big[\ln(|x|) + C\Big] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$.

Integrais indefinidas básicas

- $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$
- $\int \sec(x)\,\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$
- $\int \operatorname{cossec}(x)\,\operatorname{cotg}(x)\,dx = -\operatorname{cossec}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\int \operatorname{sech}(x)\,\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$
- $\int \operatorname{cossech}(x)\,\operatorname{cotgh}(x)\,dx = -\operatorname{cossech}(x) + C.$

Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$

Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int [c\cdot f(x)]\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$, onde c é uma constante.

Exercício

Calcule $\displaystyle\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2\right)\,dx.$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2\right)\,dx &= \int \left(x^{2/3} - 2\right)\,dx = \int x^{2/3}\,dx - \int 2\,dx \\ &= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\ &= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.\end{aligned}$$

Exercício

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.\end{aligned}$$

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

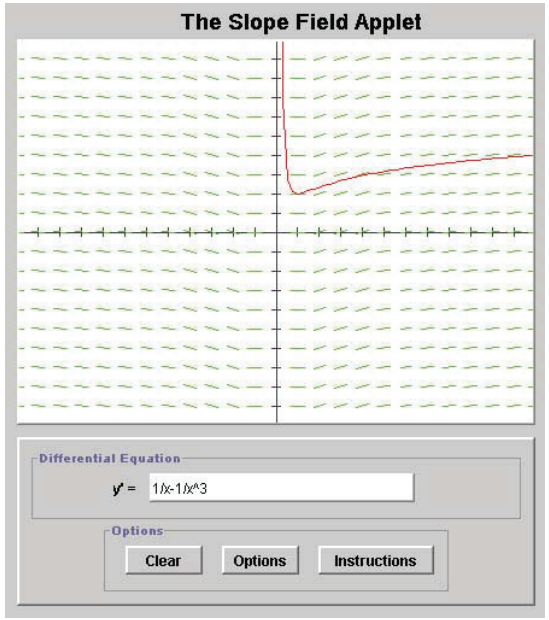
Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

Interpretação geométrica



Exercício

Roteiro

(1) Domínio da função.

(2) Interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

(3) Simetrias: função par, função ímpar, função periódica.

(4) Assíntotas horizontais e verticais.

(5) Pontos onde a função não é derivável.

(6) Intervalos de crescimento e decrescimento.

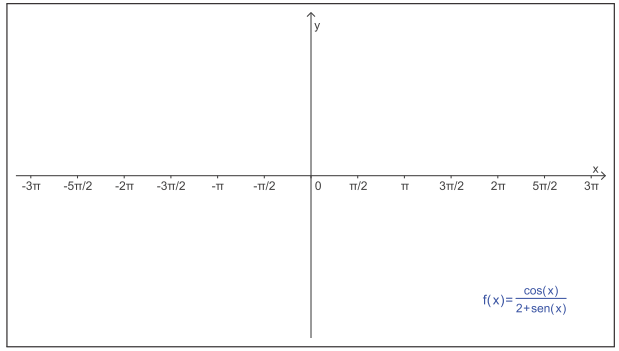
(7) Máximos e mínimos locais.

(8) Concavidade e pontos de inflexão.

Exemplo

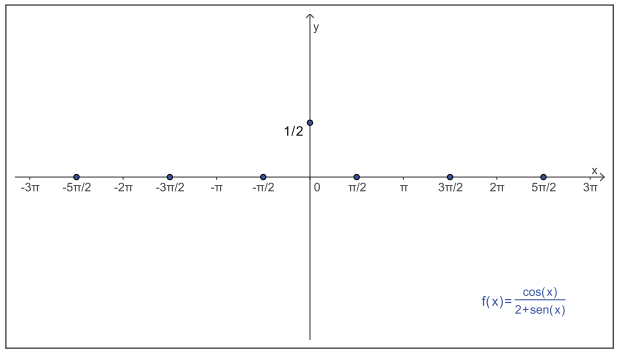
$$y = f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}$$

(1) Domínio da função



O domínio de f é $D = \mathbb{R}$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

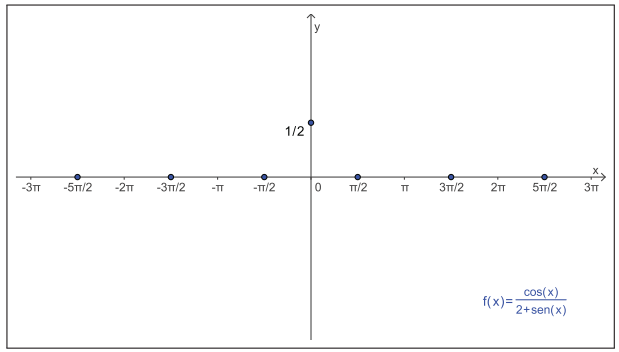


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \operatorname{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x)}{2 + \operatorname{sen}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}..$$

Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também nos pontos $(\pi/2 + k \cdot \pi, 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

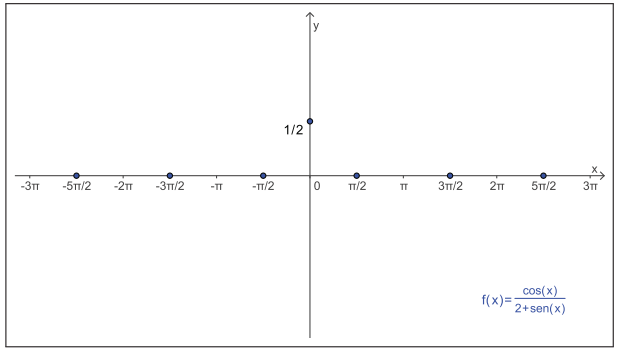
(3) Simetrias



Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \operatorname{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \operatorname{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que f não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e f não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$). A função f é periódica, pois

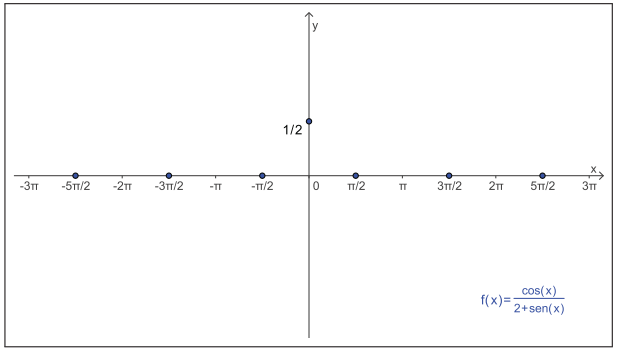
$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{2 + \operatorname{sen}(x + 2\pi)} = \frac{\cos(x)}{2 + \operatorname{sen}(x)} = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(4) Assíntotas



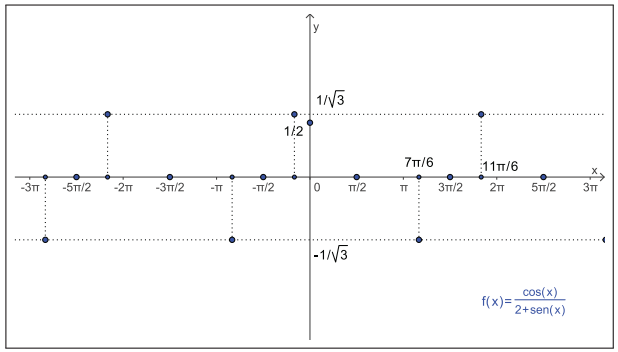
A função f não possui assíntotas horizontais, pois f é periódica e não constante. A função f não possui assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

(5) Pontos onde a função não é derivável



A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis. Logo, o gráfico de f não possui "bicos" e nem pontos onde a reta tangente é vertical.

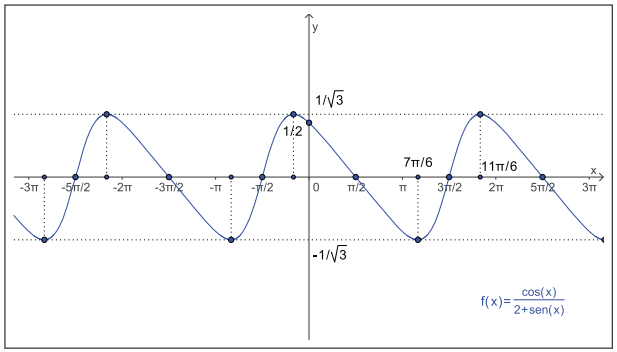
(6) Crescimento e decrescimento



Logo, f é crescente nos intervalos $\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e f é decrescente nos intervalos $\left(\frac{11\pi}{6}+(2k-1)\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos críticos de f são

$$\frac{7\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{e} \qquad \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

(8) Concavidade e pontos de inflexão

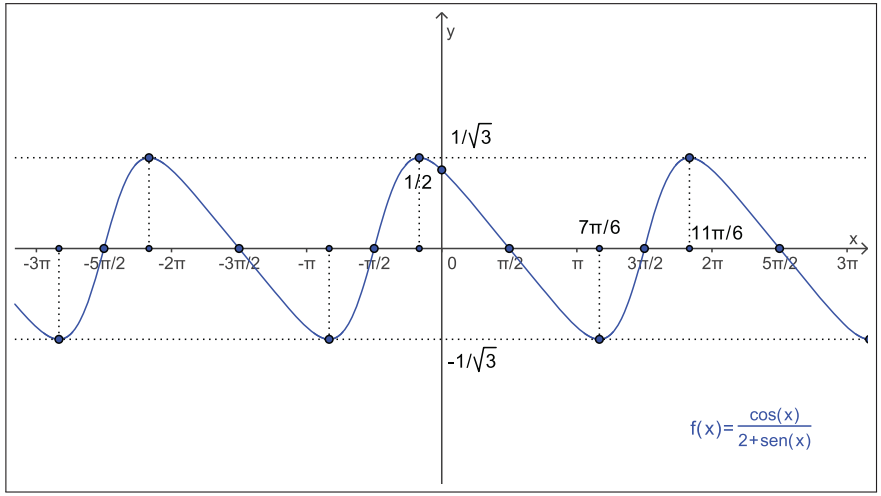


Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então, o gráfico de f é côncavo para cima nos intervalos $(\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi)$ e côncavo para baixo nos intervalos $(3\pi/2+2k\pi, 5\pi/2+2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Pronto!


y
x
$1/\sqrt{3}$
1/2
7π/6
11π/6
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
$-1/\sqrt{3}$
$f(x)=\frac{\cos(x)}{2+\mathrm{sen}(x)}$

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 24

Versão 0.9

Exercícios

Roteiro

(1) Domínio da função.

(2) Interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

(3) Simetrias: função par, função ímpar, função periódica.

(4) Assíntotas horizontais e verticais.

(5) Pontos onde a função não é derivável.

(6) Intervalos de crescimento e decrescimento.

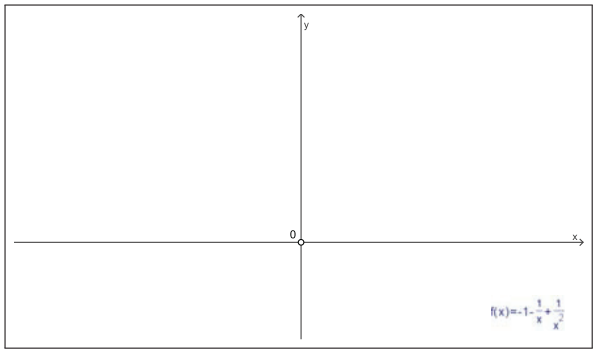
(7) Máximos e mínimos locais.

(8) Concavidade e pontos de inflexão.

Exemplo

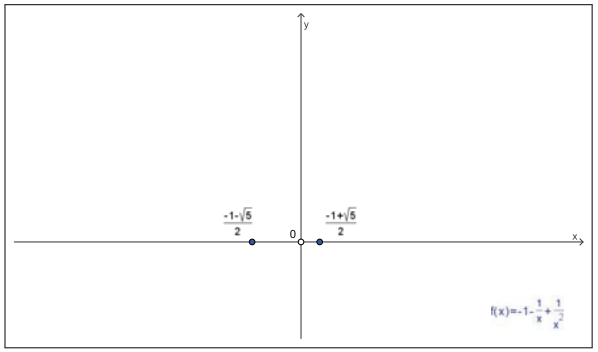
$$y = f(x) = -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

(1) Domínio da função



O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

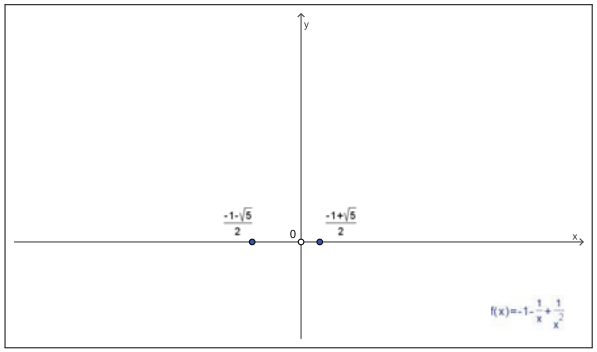


Como 0 não pertence ao domínio de f, segue-se que o gráfico de f não intercepta o eixo y. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -\frac{x^2 + x - 1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

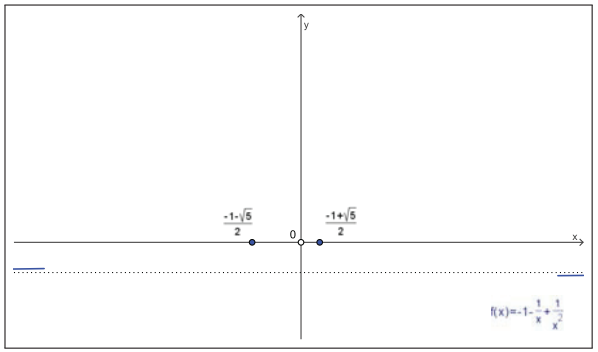
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x nos pontos $((-1-\sqrt{5})/2, 0)$ e $((-1+\sqrt{5})/2, 0)$.

(3) Simetrias



Como $f(-2) = -1/4$ e $f(2) = -5/4$, segue-se que f não é uma função par (pois $f(-2) \neq f(2)$) e f não é uma função ímpar (pois $f(-2) \neq -f(2)$).

(4) Assíntotas

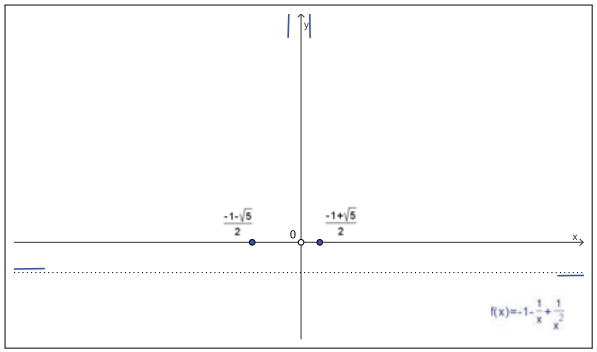


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -1^- \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -1^+,$$

concluímos que a reta $y = -1$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

(4) Assíntotas

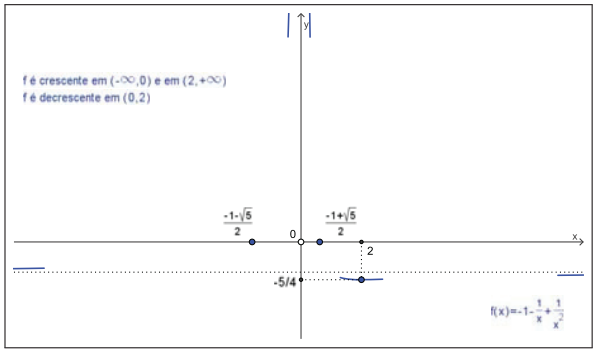


Como f é contínua em $x \neq 0$, a única candidata à assíntota vertical é a reta $x = 0$. Agora, como

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^2+x-1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} -\frac{x^2+x-1}{x^2} = +\infty,$$

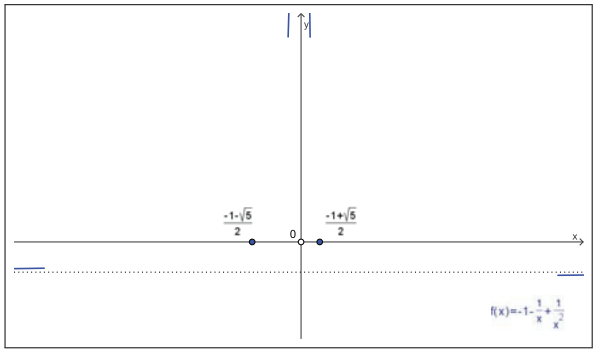
concluímos que, de fato, a retas $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

(5) Pontos onde a função não é derivável



A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis. Logo, o gráfico de f não possui "bicos" e nem pontos onde a reta tangente é vertical.

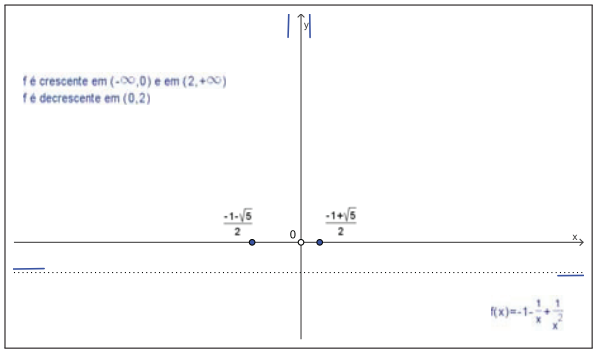
(6) Crescimento e decrescimento



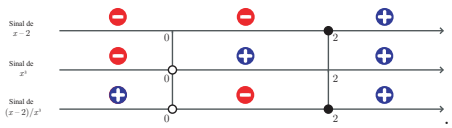
Temos que $f'(x) = (x-2)/x^3$. O estudo do sinal da derivada nos dá

Assim, f é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$, f é crescente em $(2, +\infty)$ e f é decrescente em $(0, 2)$.

(6) Crescimento e decrescimento

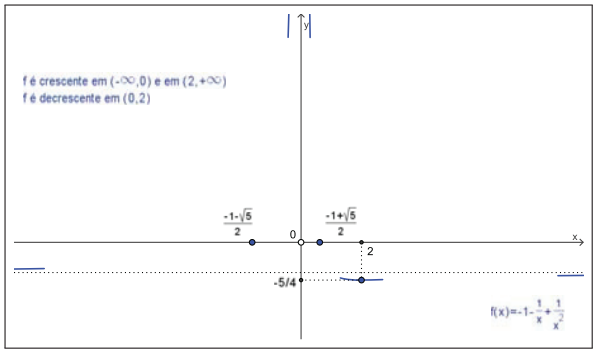


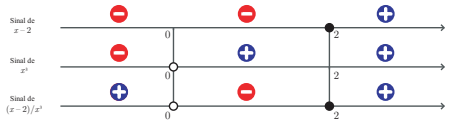
Temos que $f'(x) = (x-2)/x^3$. O estudo do sinal da derivada nos dá



Assim, f é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$, f é crescente em $(2, +\infty)$ e f é decrescente em $(0, 2)$.

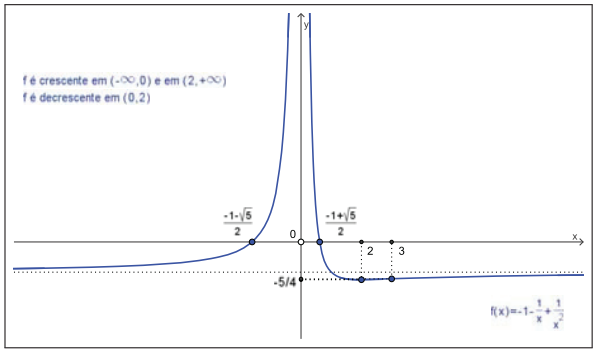
(7) Máximos e mínimos locais





Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 2$. Como, em $p = 2$, o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = 0$ é ponto de mínimo local de f em D.

(8) Concavidade e pontos de inflexão

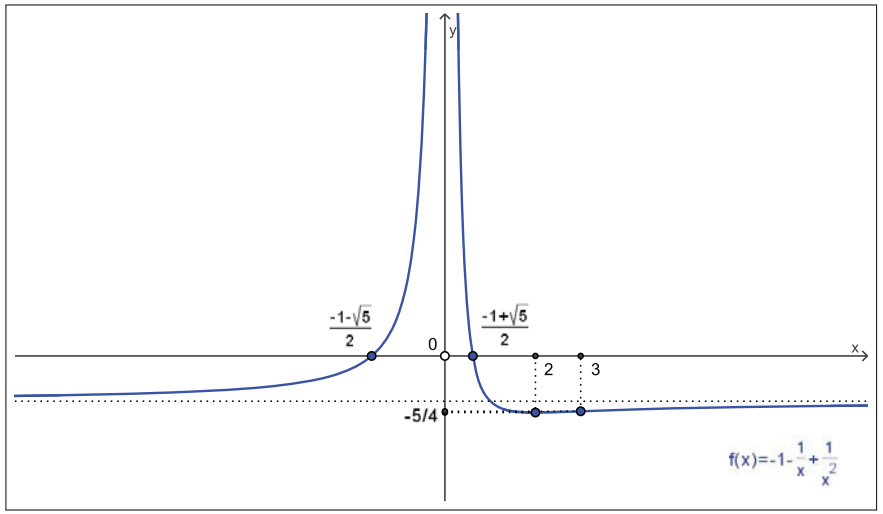


Temos que $f''(x) = -2(x-3)/x^4$. Como $x^4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de $-2(x-3)$. Assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3 \ \text{(com } x \neq 0) \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Consequentemente, f é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e $(0, 3)$. A função f é côncava para baixo em $(3, +\infty)$. O ponto $p = 3$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

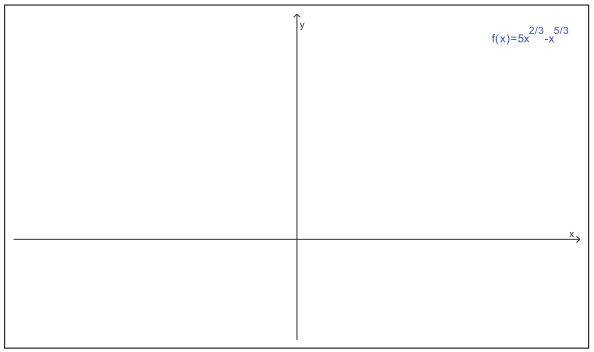
Pronto!



Exemplo

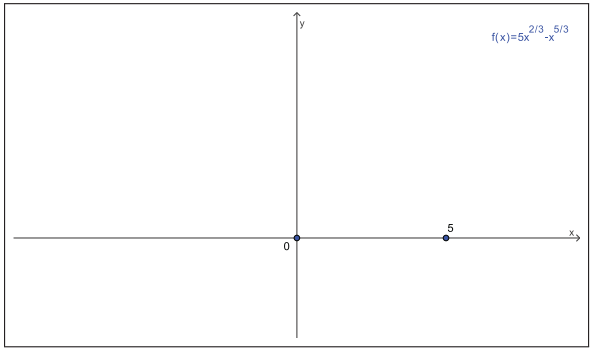
$$y = f(x) = 5\,x^{2/3} - x^{5/3}$$

(1) Domínio da função



O domínio de f é $D = \mathbb{R}$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

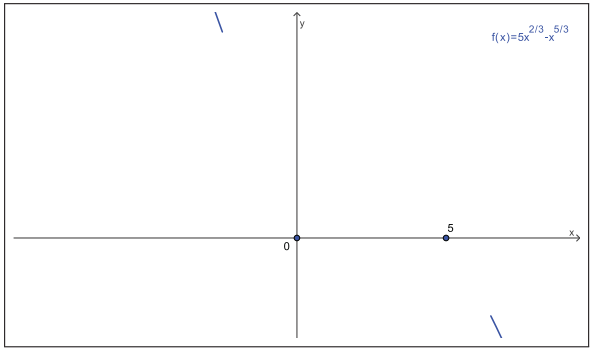


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 5\,x^{2/3} - x^{5/3} = 0 \;\Rightarrow\; x^{2/3}(5 - x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x nos pontos $(0, 0)$ e $(5, 0)$.

(4) Assíntotas



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

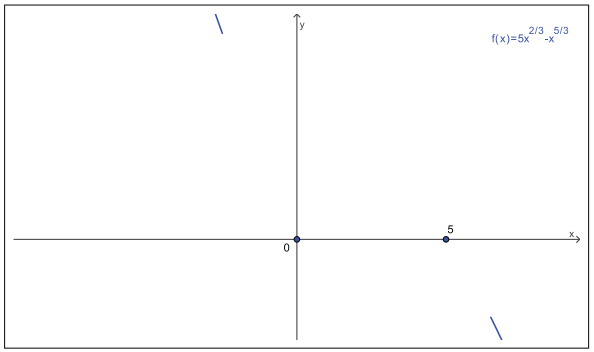
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(5\,x^{2/3} - x^{5/3}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{2/3}\,(5 - x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(5\,x^{2/3} - x^{5/3}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3}\,(5 - x) = +\infty,$$

concluímos que o gráfico de f não possui assíntotas horizontais. O gráfico de f não possui assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

(5) Pontos onde a função não é derivável



Note que

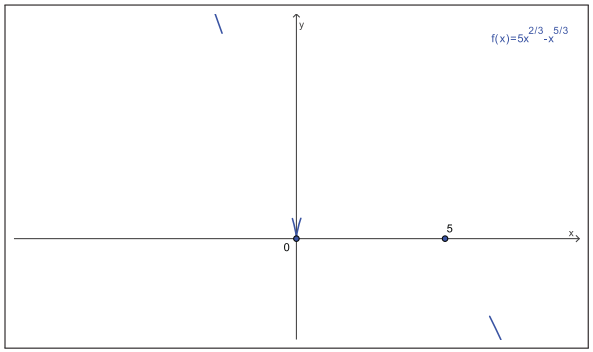
$$\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\left(x^{5/3}\right) = \frac{5}{3}x^{5/3-1} = \frac{5}{3}x^{2/3}.$$

Logo, f é derivável para todo $x \neq 0$, com

$$f'(x) = \frac{10}{3}\,x^{-1/3} - \frac{5}{3}\,x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x).$$

E para $x = 0$?

(5) Pontos onde a função não é derivável



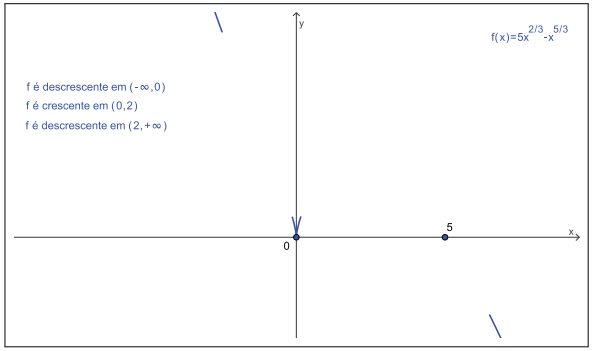
Para $x = 0$, note que

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} \frac{5\,x^{2/3} - x^{5/3}}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} (5\,x^{-1/3} - x^{2/3}) = \lim_{x\to0^+} x^{-1/3}(5 - x) = +\infty,$$

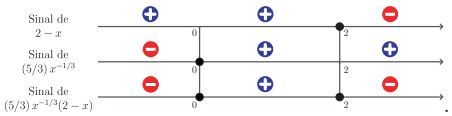
$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-} \frac{5\,x^{2/3} - x^{5/3}}{x - 0} = \lim_{x\to0^-} (5\,x^{-1/3} - x^{2/3}) = \lim_{x\to0^-} x^{-1/3}(5 - x) = -\infty.$$

Logo, f não é derivável em $x = 0$.

(6) Crescimento e decrescimento

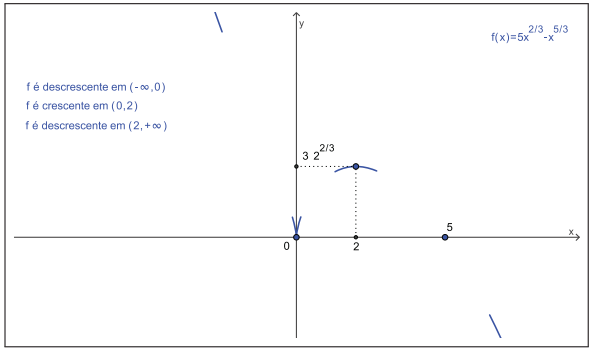


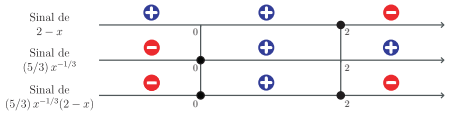
Temos que $f'(x) = (5/3)\,x^{-1/3}(2-x)$. O estudo do sinal da derivada nos dá



Assim, f é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$, f é crescente em $(0, 2)$ e f é decrescente em $(2, +\infty)$.

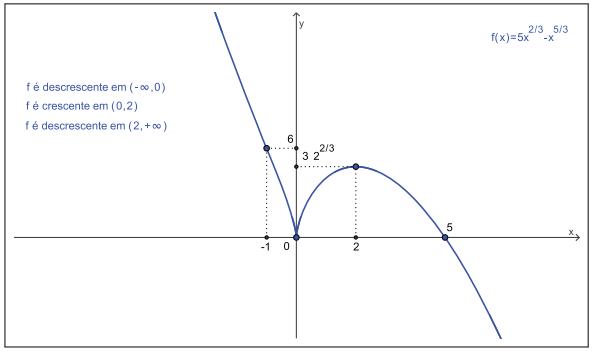
(7) Máximos e mínimos locais



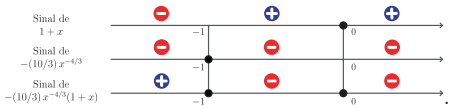


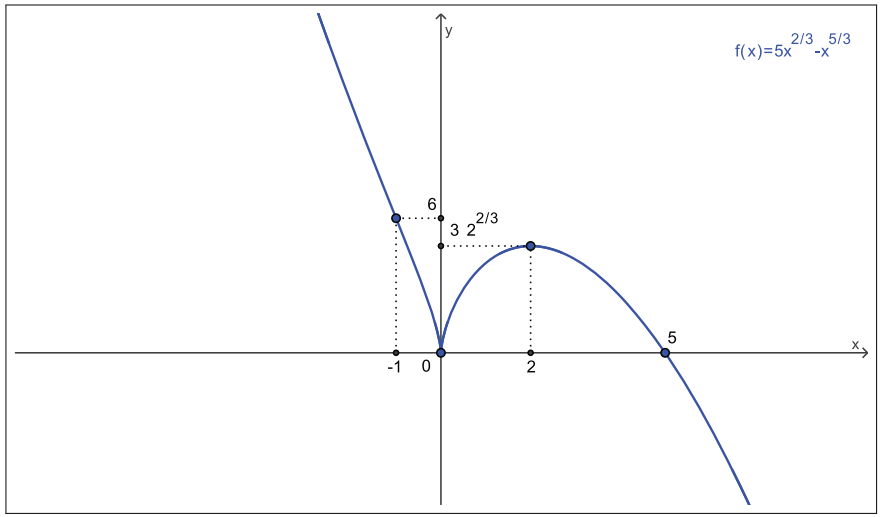
Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 2$. Como, em $p = 2$, o sinal da derivada muda de $+$ para $-$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = 2$ é ponto de máximo local de f em D. O ponto $p = 0$ (onde f não é derivável) é ponto de mínimo local de f em D.

(8) Concavidade e pontos de inflexão



Como $f'(x) = (10/3)\,x^{-1/3} - (5/3)\,x^{2/3}$, segue-se que $f''(x) = -(10/9)\,x^{-4/3} - (10/9)\,x^{-1/3}$, ou ainda, $f''(x) = -(10/3)\,x^{-4/3}(1+x)$. O estudo do sinal da derivada nos dá



Assim, f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, -1)$, f é côncava para baixo em $(-1, 0)$ e em $(0, +\infty)$. Note que $p = 0$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Pronto!