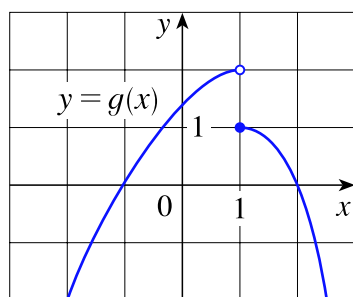
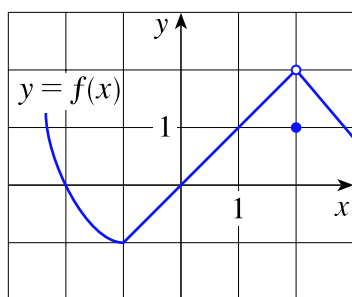


Operações com limites, o teorema do confronto e o teorema do anulamento

[01] Os gráficos das funções f e g são dados abaixo. Use-os pra calcular cada limite, caso ele exista.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$,
 (d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)}$, (e) $\lim_{x \rightarrow 2} [x^3 \cdot f(x)]$, (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$.



[02] Considere as funções

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \quad \text{e} \quad g(x) = x + 3.$$

- (a) As funções f e g são diferentes. Por quê?
 (b) Apesar de f e g serem diferentes, ainda é verdade que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3).$$

Por quê?

[03] Calcule cada limite abaixo, se ele existir.

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-t} - \sqrt{2}}{t}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$.

[04] Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade: $1 + 4x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 9$ para todo $x \neq 2$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

[05] Prove que: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$ e (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)}) = 0$.

[06] Seja

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq -1, \\ 1 - x^2, & \text{se } -1 < x < 1, \\ x - 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico de g e calcule cada um dos limites dados a seguir, se ele existir.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} g(x),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} g(x),$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x),$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x),$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -1} g(x).$$

[07] Mostre, por meio de um exemplo, que $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ e nem $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existam.

[08] Mostre, por meio de um exemplo, que $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \cdot g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ e nem $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existam.

Respostas dos Exercícios

[01] (a) 2, (b) não existe pois $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) + g(x)] = 2 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x) + g(x)]$, (c) 0, (d) 0, (e) 16, (f) 2.

[02] (a) As funções f e g são diferentes, pois possuem domínios diferentes: f está definida em $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, enquanto que g está definida em $D_g = \mathbb{R}$.

(b) Apesar das funções f e g serem diferentes, para valores de $x \neq 2$, vale que $f(x) = g(x)$, pois

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 3)}{x - 2} = x + 3 = g(x).$$

Como no cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 + x - 6)/(x - 2)]$ devemos considerar valores de x próximos de 2, mas diferentes de 2, podemos substituir $(x^2 + x - 6)/(x - 2)$ por $x + 3$.

[03] (a) $-\sqrt{2}/4$, (b) 32, (c) 108, (d) 3.

[04] 5.

[05] (a) Sejam $f(x) = x^4$ e $g(x) = \cos(2/x)$. Temos que g é uma função limitada, pois

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +1, \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

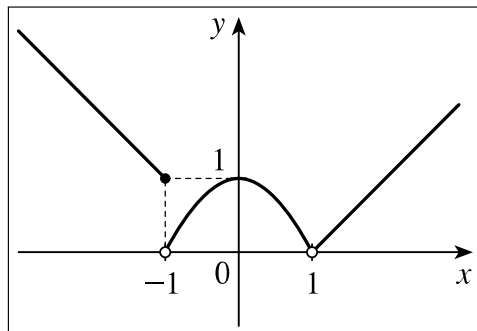
(b) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = e^{\text{sen}(\pi/x)}$. Como $-1 \leq \text{sen}(\pi/x) \leq +1$ para todo $x \neq 0$ e como a função exponencial de base e é crescente, temos que

$$e^{-1} \leq e^{\text{sen}(\pi/x)} \leq e^{+1}, \quad \text{para todo } x \neq 0,$$

isto é, $g(x) = e^{\text{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} e^{\text{sen}(\pi/x)}) = 0.$$

[06] O esboço do gráfico de g é dado na figura a seguir.



(a) 0, (b) 0, (c) 1, (d) 1, (e) 0, (f) não existe, pois $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.

[07] Sejam $f(x) = +|x|/x$ e $g(x) = -|x|/x$. Temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existem, mas

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(+\frac{|x|}{x} \right) + \left(-\frac{|x|}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

existe.

[08] Sejam $f(x) = +|x|/x$ e $g(x) = +|x|/x$. Temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existem, mas

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(+\frac{|x|}{x} \right) \cdot \left(+\frac{|x|}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

existe.